Lógica

Introducción a la Programación - Introducción a la Computación
Fundamentos de la Informática
(T.U.M - T.U.G. - T.U.E. - T.U.R. - T.U.W.- Prof. Tec. Elect. - T.U.T - Ing. Electr.)

Área de Servicios
Departamento de Informática
Universidad Nacional de San Luis

11 de abril de 2017

Índice

1. Introducción a la Lógica Proposicional

Existen en la realidad un número considerable de problemas con los que una persona se enfrenta y de los cuales se deben deducir ciertos datos para poder resolverlos. Generalmente, la forma en que las personas aplican el poder deductivo es muy personal, sin embargo éste podría ser encausado o guiado a través del uso de reglas de deducción. A su vez, será necesario que dichas reglas sean establecidas y usadas con una cierta precisión de modo que puedan ser reutilizadas toda vez que un mismo problema o problemas de características similares sean planteados.

La manera cotidiana de expresar los problemas es por medio de nuestro lenguaje natural. Sin embargo, éste es en esencia ambiguo por lo cual es necesario transformarlo, acotarlo o restringirlo de modo que se convierta en un lenguaje inequívoco. Particularmente, los lenguajes simbólicos proveen esa clase de precisión. Si además esos símbolos son símbolos matemáticos, lo que tendremos es una precisión matemática en la acción de deducir. Ésta es precisamente la finalidad de la **lógica matemática**: *expresar problemas por medio de un lenguaje inequívoco que habilite el uso de reglas de deducción para la solución de los mismos.*

2. Proposiciones y Conectivas

Nuestro lenguaje cotidiano se conforma de frases, expresiones o enunciados. Si se desea deducir información a partir de una frase es necesario poder evaluarla como verdadera o falsa. Por ejemplo, si consideramos las siguientes frases:

4 es un número par
11 es un número par

se puede decir que la primera es verdadera y que la segunda es falsa. Sin embargo, para frases como:

Nunca he fumado un cigarrillo
El partido de rugby terminó empatado

a pesar de que no somos capaces de decidir si ellas son verdaderas o falsas, porque dependiendo de quién las diga y/o en qué contexto podrían ser tanto verdaderas como falsas, podemos asegurar que seremos capaces de evaluarlas como verdaderas o falsas en una situación particular. Esto se debe a que en nuestro lenguaje coloquial hay una gran parte de la informaci(ó)n que est(á) impl(í)cita. No obstante, no toda frase puede ser evaluada, existen frases las cuales no se pueden categorizar.

Frases categorizables	Frases NO categorizables
El líder ha muerto.	¡Qué frío!
Juan compró dulces con dinero.	¿Cuánto pesas?
El barómetro ayuda a determinar el clima.	Alcánzame el libro
Si Juan no tiene dinero entonces no compra dulces.	Presione ENTER para continuar
13 es un número primo	

Generalizando diremos que toda frase que tiene una función de tipo informativa, es una frase que se puede categorizar, excluyendo aquellas frases que cumplen la función de transmitir una orden o directriz, como tambien aquellas cuya función es expresiva. Por lo tanto, las frases exclamativas, las interrogativas y las imperativas no son categorizables. Así, desde el punto de vista gramatical, una *proposición* es lo que se denomina una oración *declarativa* (en contraste con las oraciones interrogativas, exclamativas o imperativas).

Si se analiza gramaticalmente una frase o expresión del lenguaje cotidiano, veremos que éstas pueden clasificarse como frases simples o compuestas. Las frases simples constan de un sujeto y un predicado. Las frases compuestas se conforman a partir de las frases simples unidas por elementos gramaticales especiales que las asocian (conjunciones).

Considerando estos conceptos y con la intención de lograr un lenguaje menos ambiguo es que, como primera medida, se restringe el mismo a solamente el conjunto de frases categorizables (proposiciones), estableciendo el siguiente supuesto básico:

Toda frase simple puede evaluarse como verdadera o falsa.

Como segunda medida tendiente a lograr un lenguaje aún más preciso, se acuerda adoptar una nueva terminología y representación o simbología asociada.

Esto es, llamar:

- a las frases: **proposiciones**(ya sea simples o compuestas según corresponda)
- a los elementos gramaticales que unen a las frases simples: **conectivos**

Y establecer como símbolos:

- para representar las proposiciones (simples o compuestas): las letras mayúsculas
- para representar los conectivos, símbolos tales como: $\Longleftrightarrow$ $\Rightarrow$ $\vee$ $\wedge$ $\neg$ $\veebar$

Por lo tanto, para poder construir enunciados acerca del mundo real se hará uso de un lenguaje formal, acotado y más limitado que el lenguaje natural, mediante el cual se podrán escribir proposiciones (simples y compuestas) con los que se expresarán hechos acerca del mundo real.

Cuando un enunciado del lenguaje natural se representa por medio de la simbología asociada, lo que queda bosquejado es la estructura o esqueleto lógico del mismo; es decir, la **forma** que tiene dicho enunciado o conjunto de enunciados. Dicha forma es la que nos va a permitir realizar nuestras deducciones sin tener en cuenta el significado asociado.

Teniendo en cuenta esta última afirmación, analicemos el siguiente ejemplo:

Caso 1:

- Si Sócrates es hombre entonces es mortal.

De este enunciado claramente se puede deducir que, como sabemos que Sócrates es hombre, éste es también mortal.

Caso 2:

- Si Sócrates es hombre, mortal es.

Caso 3:

- Sócrates es hombre.
- Sócrates es mortal.

En los casos 2 y 3 se podría llegar a deducir lo mismo que en el caso 1 (no obstante tener dos enunciados en el caso 3) pero haciendo uso de reglas gramaticales y del significado por nosotros conocido asociado a las palabras y en algunos casos nuestros conocimientos previos; con lo cual no se estaría considerando la intención arriba establecida de que: *la estructura del enunciado debe permitirme deducir una información particular.*

La manera correcta en que esta deducción podría hacerse, considerando sólo que la estructura de los enunciados me permita hacer la inferencia de la información particular sobre que Sócrates es mortal sería:

Caso Correcto: estableciendo las siguientes proposiciones como ciertas:

- Sócrates es hombre.
- Los hombres son mortales. podemos concluir que:
- Sócrates es mortal.

En la **Lógica Formal** se estudian los principios y métodos a través de los cuales a partir de la validez de los argumentos, desde el punto de vista solamente de su estructura, sin tomar en cuenta el contenido semántico de las expresiones de los argumentos, se determina la validez de la conclusión. De esta manera si se argumenta que:

- *Todos los majadíes son de Majadistán.*
- *Rudistein es majadí.*
- *En consecuencia, Rudistein es de Majadistán.*

En este argumento, no se toma en cuenta si los majadíes son humanos, perros, pericos o un concepto abstracto de cualquier área. Tampoco importa si Rudinstein es un ciudadano de alguna ciudad del mundo o si es el nombre de un perro. De esta manera desde el punto de vista de su estructura esta argumentación es válida.

Se hace hincapié en que la Lógica **no** se hace responsable de su aplicación a nivel semántico. Se puede decir que la Lógica es una herramienta para el análisis de la veracidad de argumentaciones en base sólo a la estructura de éstas, donde el significado de los elementos que intervienen no es tomado en cuenta.

La argumentación anterior tiene dos partes principales:

Las premisas:

- *Todos los majadíes son de Majadistán.*
- *Rudistein es majadí.*

La conclusión:

- *Rudistein es de Majadistán.*

De esta manera la argumentación es válida, ya que de las premisas sigue la conclusión, lo cual hasta cierto punto nos parece totalmente natural.

Consideremos el siguiente argumento:

- *Argentina está en África o Argentina está en Asia.*
- *Argentina no está en Asia.*
- En consecuencia, *Argentina está en África.*

Nuevamente esta argumentación es válida desde el punto de vista lógico, aún cuando se sabe que la **conclusión** es **falsa**, porque conocemos que *Argentina está en América.* ¿Cómo puede ser esto? ¿A partir de la Lógica se pueden obtener conclusiones equivocadas?

La respuesta es afirmativa, ya que la Lógica no verifica si el significado de las premisas es correcto o no.

Debido a lo anterior es necesario distinguir entre *proposiciones verdaderas* y *proposiciones lógicamente verdaderas.* Las primeras son verdaderas por su significado e independientemente de su estructura, mientras que las segundas no necesariamente lo son.

De esta manera, las proposiciones:

- *Argentina está en África o Argentina está en Asia*
- *Argentina está en África*

Son verdaderas lógicamente debido a que la primera es una premisa y a que la segunda ha sido derivada lógicamente de sus premisas.

Concluyendo, es necesario poder lograr deducir información solamente a través de la forma de los enunciados. De esta manera, se asegura la independencia del significado que un enunciado posea. Es prioritario entonces, estudiar las **formas enunciativas**, es decir, *la forma en que se va a formular una idea de modo que ésta exprese siempre lo que se desea.* En consecuencia, **no es el significado del enunciado lo que interesa sino la forma en que éste se expresa**.

Generalizando dicho concepto y formalizándolo, se podría decir que:

- Dadas las letras A, B, C, éstas representan a cualquier enunciado y se las denomina *variables de enunciado* o *variables proposicionales.*
- Toda variable proposicional es **verdadera** o **falsa**.
- Dada una proposición que se liga con cualquier otra proposición a través de un conectivo, esta ligadura debe darme como resultado una tercera proposición.
- Si toda proposición simple es verdadera (o falsa) entonces toda proposición enunciativa compuesta, constituida a partir de proposiciones simples, es también verdadera (o falsa) y sus valores surgen a partir de los valores de las proposiciones que las componen.

3. Proposiciones Compuestas y Tablas de Verdad

Resta entonces analizar cada una de los conectivos que me permiten armar proposiciones compuestas y cómo éstos deben ser interpretados, para que toda vez que una misma proposición de características similares sea planteada ésta se evalúe de la misma manera. Esto es, ver cuáles son las reglas que en forma inequívoca y precisa me permitan deducir los valores de verdad para las variables proposicionales que representan proposiciones compuestas. Por convención para representar el valor de verdad *verdadero* se utiliza la letra mayúscula **V** y para el valor de verdad *falso* la letra mayúscula **F**. En alguna bibliografía, en su lugar se utiliza $\top$ para *verdadero* y $\perp$ para *falso.*

Negación

Se podría decir que es un conectivo particular o especial puesto que en lugar de relacionar dos proposiciones, afecta solamente a la proposición a la cual se encuentra asociada[1].

Si se tiene una proposición cualquiera A, su negación es otra proposición $\neg$A. Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, el conectivo de negación está representado por la

[1] En este caso, por sólo afectar a una proposición, se lo denomina conectivo *unario*. Los demás conectivos se denominan *binarios*, por conectar a dos proposiciones.

palabra "no", por lo tanto toda vez que ésta se une a cualquier frase simple categorizable, la misma produce un cambio de categoría a dicha frase (si era verdadera, pasará a ser falsa y viceversa).

Ejemplo:

Iré a verte mañana si se la categorizara como verdadera.

No iré a verte mañana cambiaría la categoría de la frase a falsa.

□

Si se expresa dicho enunciado en forma general por medio de una variable proposicional, digamos **P** tendremos: Sea **P** una variable proposicional (o variable de enunciado), su negación es ¬ **P** y la tabla de posibles valores que la misma puede adoptar es la siguiente:

P	¬ P
V	F
F	V

Esta tabla se denomina **Tabla de Valores de Verdad** y es considerada como la definición de dicho conectivo.

Conjunción

Si se tiene una proposición compuesta A conformado por dos proposiciones, supongamos B y C, unidas por medio del conectivo conjunción ($\wedge$), la proposición A tomará valores de verdad verdadero solamente cuando ambas proposiciones que la componen son verdaderas. Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, el conectivo de conjunción está generalmente representado por la palabra "y", y es la palabra cuya función más claramente se asocia con el significado que le otorgamos.

Ejemplo:

$$\text{La proposición compuesta } \underbrace{\textit{“Juan vino y Pedro se fue”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por las proposiciones simples } \underbrace{\textit{“Juan vino”}}_{\text{B}} \text{ y } \underbrace{\textit{“Pedro se fue”}}_{\text{C}}.$$

□

Lo anterior se puede expresar en forma general por medio de las siguientes variables poposicionales y su correspondiente tabla o regla de composición. Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales, (**P** representando a B y **Q** representando a C) los valores de verdad que adoptará la proposición A (representado simbólicamente por **P** $\wedge$ **Q**) son:

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esta tabla es la tabla de valores de verdad para el conectivo ∧.

Disyunción

Si se tiene una proposición compuesta A conformada por dos proposiciones, supongamos B y C, unidas por medio del conectivo disyunción (∨), la proposición A tomará valores de verdad verdadero solamente cuando una de las proposiciones que la componen sea verdadera; con lo cual, si ambas son verdaderas ya se da por cumplida la condición establecida por el conectivo. Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, el conectivo de disyunción está generalmente representado por la palabra "o".

Ejemplo:

$$\text{La proposición compuesta } \underbrace{\textit{“Estudiaré música o estudiaré canto”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por los proposiciones simples } \underbrace{\textit{“Estudiaré música”}}_{\text{B}} \text{ y } \underbrace{\textit{“Estudiaré canto”}}_{\text{C}}$$

□

Lo anterior se puede expresar en forma general por medio de variables proposicionales y su correspondiente tabla o regla de composición. Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales, (**P** representando a B y **Q** representando a C) los valores de verdad que adoptará la proposición A (representada simbólicamente por **P** ∨ **Q**) son:

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional

Existe en nuestro lenguaje cotidiano, la posibilidad de armar frases compuestas de tipo condicional, es decir, proposiciones condicionales que llevan implícita una implicación material o condición material entre dos proposiciones simples. Estas proposiciones suelen expresarse por medio del conectivo "si .... entonces" que relaciona dos proposiciones; la que se encuentra detrás de la palabra “si” se denomina *antecedente* y la que sigue a la palabra “entonces” se denomina *consecuente.*

Ejemplo:

La proposición compuesta $\underbrace{\textit{“}\textbf{\textit{Si}}\textit{ me levantо temprano, }\textbf{entonces}\textit{ tomaré el tren de las ocho”}}_{\text{A}}$

formada por las proposiciones simples $\underbrace{\textit{“me levanto temprano”}}_{\text{B}}$ y

$\underbrace{\textit{“tomaré el tren de las ocho”}}_{\text{C}}$

□

Si se tiene una proposición compuesta A conformada por dos proposiciones, supongamos B y C, unidas por medio del conectivo condicional, resta analizar cuándo la proposición A tomará valores de verdad verdadero. Para ello se hará un análisis de las posibles situaciones que se pueden presentar con el ejemplo planteado.

- Si es verdad que *me levanto temprano* y no es cierto que *tomaré el tren de las ocho*, diremos que el condicional es falso; es decir, si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, el condicional es falso.
- En cambio, si es verdad que *me levanto temprano*, y también lo es que *tomaré el tren a las ocho*, diremos sin duda que el condicional es verdadero; o sea, si el antecedente y consecuente son verdaderos, el condicional es verdadero.

Se podría decir qu éstos son los casos más comunes que se pueden producir y los cuales se pueden analizar en forma intuitiva. Para completar el análisis, sobre las cuatro combinaciones posibles para los valores de verdad que pueden tomar las dos proposiciones simples, quedan por analizar dos casos: cuando el antecedente es falso y el consecuente verdadero, y cuando ambos son falsos. Condicionales con antecedentes falsos resultan raros o sin sentido en el lenguaje ordinario y por eso es difícil inferir qué valores de verdad le corresponden. La lógica resuelve considerar verdaderos estos dos condicionales; es decir, que si el antecedente es falso no es necesario considerar el valor de verdad asociado al consecuente porque siempre la proposición será verdadera. Ello no es totalmente arbitrario ni entra en conflicto con el lenguaje ordinario, sino que más bien completa lo que éste deja sin decidir.

Lo anterior se puede expresar por medio de las siguientes variables proposicionales y su correspondiente tabla o regla de composición. Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales, (**P** representandas a B y **Q** representando a C):

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

Otro tipo de proposición compuesta es el bicondicional, que se forma usualmente en nuestro lenguaje cotidiano con la conectiva "sí y sólo sí", como en la frase *"Jugaremos a las cartas sí y sólo sí reunimos cuatro personas"*, entonces tendremos:

$$\text{La proposición compuesta } \underbrace{\textit{“Jugaremos a las cartas sí y sólo sí reunimos cuatro personas”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por las proposiciones simples } \underbrace{\textit{“Jugaremos a las cartas”}}_{\text{B}} \text{ y}$$

$$\underbrace{\textit{“reunimos cuatro personas”}}_{\text{C}}$$

Los componentes del bicondicional reciben el nombre de componente izquierdo (en el ejemplo sería la proposición representada por B) y componente derecho (en el ejemplo la proposición representada por C) y el símbolo que representa el "sí y sólo sí" es $\iff$.

Como su nombre lo indica, el bicondicional es un condicional doble. B **sí y sólo sí** C (en símbolos B $\iff$ C) que equivale a la conjunción de **si** B **entonces** C y **si** C **entonces** B. La primer componente se puede simbolizar B $\Rightarrow$ C y la segunda C $\Rightarrow$ B, por lo que el bicondicional resulta equivalente al esquema (B $\Rightarrow$ C) $\wedge$ (C $\Rightarrow$ B), que es la conjunción de dos condicionales, donde el antecedente del primero es el consecuente del segundo , y el consecuente del primero es el antecedente del segundo. O lo que es lo mismo, por conmutatividad del conectivo conjunción, (C $\Rightarrow$ B) $\wedge$ (B $\Rightarrow$ C).

Resta entonces ver, dada una proposición compuesta A conformada por dos proposiciones B y C, unidas por medio del conectivo bicondicional ($\iff$), cuándo la proposición A tomará valores de verdad verdadero o falso: si uno de sus componentes es verdadero y el otro falso, el bicondicional es falso, y es verdadero cuando ambos componentes son verdaderos, o ambos son falsos; es decir, que el bicondicional es verdadero siempre que ambas proposiciones tengan el mismo valor de verdad. A igual conclusión podría llegarse si se evaluara cualquiera de las dos proposiciones equivalentes (B $\Rightarrow$ C) $\wedge$ (C $\Rightarrow$ B) o (C $\Rightarrow$ B) $\wedge$ (B $\Rightarrow$ C).

Lo anterior se puede expresar por medio de variables proposicionales y su correspondiente tabla o regla de composición. Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales, (**P** representando a B y **Q** representando a C):

P	Q	P $\iff$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Disyunción Excluyente

Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, existe un conectivo de disyunción excluyente, simbolizado por $\veebar$ [2], que está generalmente representado por las palabras "o bien ..., o bien ...", lo cual considera que esperamos que una y sólo una de las proposiciones que componen la proposición compuesta será verdadera al mismo tiempo, a diferencia de la disyunción no excluyente que es verdadera aún siendo ambas proposiciones verdaderas.

Dadas dos proposiciones P y Q, la proposición compuesta formada por (P $\veebar$ Q) será verdadera cuando sólo una de las dos proposiciones tome el valor de verdad <u>Verdadero</u> y la otra tome el valor de verdad <u>Falso</u>.

Ejemplo:

$$\text{La proposición compuesta } \underbrace{\textit{“O bien estudiaré música, o bien estudiaré canto”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por los proposiciones simples } \underbrace{\textit{“Estudiaré música”}}_{\text{B}} \text{ y } \underbrace{\textit{“Estudiaré canto”}}_{\text{C}}$$

Se debe representar como una disyunción excluyente, debido a que se está expresando que sólo una de las actividades será la que se estudie. Entonces, la proposición A se puede representar por medio de variables proposicionales como ($\mathbf{P} \veebar \mathbf{Q}$), siendo **P** y **Q** dos variables proposicionales (**P** representando a B y **Q** representando a C).

□

En algunos casos se puede determinar a partir del contexto de la proposición compuesta si el conectivo a utilizar debe ser o no una disyunción excluyente, aunque la palabra que una las proposiciones simples sea la misma que la usada en una disyunción no excluyente (estén conectadas con "o").

Ejemplo:

$$\text{La proposición compuesta}$$
$$\underbrace{\textit{“Mañana Sofía cumple 16 años, o mañana Sofía cumple 17 años”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por los proposiciones simples } \underbrace{\textit{“Mañana Sofía cumple 16 años”}}_{\text{B}} \text{ y}$$
$$\underbrace{\textit{“Mañana Sofía cumple 17 años”'}}_{\text{C}}$$

Claramente por su significado no pueden ser ambas proposiciones verdaderas al mismo tiempo, por lo tanto el conectivo a utilizar en este caso sería la disyunción excluyente. Así, la

[2]En la bibliografía también puede aparecer simbolizado por $\oplus$.

proposición A se puede representar como ($\mathbf{P} \veebar \mathbf{Q}$), siendo **P** y **Q** dos variables proposicionales (**P** representando a B y **Q** representando a C).

$\square$

Cualquiera de las situaciones anteriores se puede expresar en forma general por medio de variables proposicionales y su correspondiente tabla o regla de composición. Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales los valores de verdad que adoptará la proposición compuesta, representada simbólicamente por ($\mathbf{P} \veebar \mathbf{Q}$), son:

P	Q	(P $\veebar$ Q)
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. El Lenguaje de la Lógica Proposicional (Fórmula Bien Formada)

Hasta ahora se ha analizado el significado de las proposiciones compuestas a partir del valor de verdad asociado a cada una de las proposiciones simples que las conforman, dando para ello las tablas de verdad correspondientes a cada uno de los conectivos del lenguaje. Sin embargo, se debe también analizar formalmente cómo se deben armar correctamente las proposiciones, de manera tal que haya una única manera de interpretarlas. Las reglas necesarias para escribir correctamente una proposición conforman lo que se denomina *sintaxis del lenguaje.*

Como ya se mencionó, las proposiciones compuestas son agrupaciones de proposiciones simples (también llamadas átomos) unidas por conectivos lógicos. Para construir proposiciones, se requiere entonces de un conjunto de reglas que establecen la manera de escribir una proposición correcta. A las proposiciones obtenidas haciendo uso de estas reglas se las denomina **fórmulas bien formadas** (fbfs).

Se tiene definido, para escribir una fórmula bien formada, un alfabeto con los símbolos que pueden utilizarse. Una fbf sólo puede contener símbolos del siguiente conjunto: letras mayúsculas que representen variables proposicionales, los conectivos lógicos (en nuestro caso: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow, \veebar$) y los paréntesis izquierdo y derecho: (,).

Las siguientes reglas permiten construir una *fórmula bien formada* (fbf):

1. Una variable proposicional es una fórmula bien formada, también llamada *fórmula atómica*[3].
2. Si P es una fórmula bien formada, $\neg$ P también es una fórmula bien formada.
3. Si P y Q son fórmulas bien formadas, (P $\wedge$ Q), (P $\vee$ Q), (P $\veebar$ Q), (P $\Rightarrow$ Q) y (P $\Longleftrightarrow$ Q) son fórmulas bien formadas.
4. Todas las fórmulas bien formadas se obtienen aplicando las reglas 1, 2 y 3.

Por lo tanto, para expresar cualquier proposición en Lógica Proposicional, se debe asociar a cada proposición simple distinta que la compone una variable proposicional que la represente y vincular dichas variables proposicionales a través de las reglas que permite incorporar los conectivos correspondientes, de manera tal de armar la fórmula bien formada que la representa.

Cabe aclarar que los paréntesis se utilizan en la escritura de las fbfs para asegurar una interpretación única del significado de las proposiciones. En caso de no usarlos habría que considerar, al interpretar la proposición, otras reglas que establezcan la prioridad o jerarquía de cada uno de los conectivos. Esta jerarquía se debe utilizar cada vez que se quiera evaluar una fórmula.

Utilizando estas reglas es posible, a partir de las fórmulas atómicas y los conectivos, construir proposiciones o fórmulas bien formadas más complejas de cualquier longitud.

Ejemplo:

Dadas las siguientes expresiones, se indica en cada caso cómo se clasifican y por qué:

A	es fórmula bien formada atómica, siendo A variable proposicional
((P $\Rightarrow$ Q) $\Rightarrow$ R)	es fbf, siendo P, Q y R variables proposicionales
(P $\Rightarrow$ Q $\Rightarrow$ R)	es fbf, siendo P, Q y R variables proposicionales
(P $\Rightarrow$ (Q $\Rightarrow$ R)	**no** es fbf, a cada "("le corresponde un ")"
$\neg$ A	es fbf, siendo A variable proposicional
($\neg$ P $\wedge\neg$ Q)	fbf, siendo P y Q variables proposicionales
(P $\neg\wedge$ Q)	**no** es fbf, porque no se puede negar un conectivo
$\neg$((P $\Rightarrow$ Q) $\Rightarrow$ R)	es fbf, siendo P, Q y R variables proposicionales

$\square$

[3]Se las denomina fórmulas atómicas porque las variables proposicionales representan a las proposiciones simples o átomos.

5. Evaluación de Fórmulas Bien Formadas

Hemos hablado hasta ahora de cómo se construyen correctamente las fbfs de la Lógica Proposicional. Ahora debemos analizar cómo evaluar el significado de las mismas. Para ello, se puede construir una tabla de verdad para cualquier fórmula bien formada, utilizando las tablas de verdad de los conectivos ya analizadas.

Ejemplo:

Para la siguiente fórmula bien formada, mostraremos paso a paso el avance de su evaluación:

$$(\neg\ (P \lor Q) \land (\neg\ P \Rightarrow \neg\ Q))$$

De una de las posibles manera de evaluarla, considerando que se debe respetar la prioridad de evaluación que establecen los paréntesis, sería:

1) Primero se evalúa la fórmula (P $\lor$ Q):

P	Q	(P $\lor$ Q)	$\neg$ (P $\lor$ Q)	$\neg$ P	$\neg$ Q	($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q)	($\neg$ (P $\lor$ Q) $\land$ ($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q))
V	V	V					
V	F	V					
F	V	V					
F	F	F					

2) Luego se evalúa la fórmula $\neg$(P $\lor$ Q):

P	Q	(P $\lor$ Q)	$\neg$ (P $\lor$ Q)	$\neg$ P	$\neg$ Q	($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q)	($\neg$ (P $\lor$ Q) $\land$ ($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q))
V	V	V	F				
V	F	V	F				
F	V	V	F				
F	F	F	V				

3) Ahora se evalúa la fórmula $\neg$P:

P	Q	(P $\lor$ Q)	$\neg$ (P $\lor$ Q)	$\neg$ P	$\neg$ Q	($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q)	($\neg$ (P $\lor$ Q) $\land$ ($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q))
V	V	V	F	F			
V	F	V	F	F			
F	V	V	F	V			
F	F	F	V	V			

4) Luego se evalúa la fórmula $\neg$ Q:

P	Q	(P $\vee$ Q)	$\neg$ (P $\vee$ Q)	$\neg$ P	$\neg$ Q	($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q)	($\neg$ (P $\vee$ Q) $\wedge$ ($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q))
V	V	V	F	F	F		
V	F	V	F	F	V		
F	V	V	F	V	F		
F	F	F	V	V	V		

5) Luego se evalúa la fórmula ($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q):

P	Q	(P $\vee$ Q)	$\neg$ (P $\vee$ Q)	$\neg$ P	$\neg$ Q	($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q)	($\neg$ (P $\vee$ Q) $\wedge$ ($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q))
V	V	V	F	F	F	V	
V	F	V	F	F	V	V	
F	V	V	F	V	F	F	
F	F	F	V	V	V	V	

6) Ahora finalmente se evalúa la fórmula completa ($\neg$ (P $\vee$ Q) $\wedge$ ($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q)):

P	Q	(P $\vee$ Q)	$\neg$ (P $\vee$ Q)	$\neg$ P	$\neg$ Q	($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q)	($\neg$ (P $\vee$ Q) $\wedge$ ($\neg$ P $\Rightarrow$ $\neg$ Q))
V	V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V

$\square$

Aunque en el ejemplo se ha mostrado paso a paso la evaluación de la fórmula, en general se hace sobre una única tabla.

Ejemplo:

Dada la siguiente fbf ($\neg$ P $\vee$ Q), su tabla de verdad será:

P	Q	$\neg$ P	($\neg$ P $\vee$ Q)
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Dada la siguiente fbf (P $\iff$ (Q $\vee$ R)) y su tabla de verdad será:

P	Q	R	(Q $\vee$ R)	(P $\iff$ (Q $\vee$ R))
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	V

$\square$

Dado que la tabla de verdad de una fbf debe considerar todas las posibles combinaciones de valores de verdad para las distintas variables proposicionales, si en la fbf aparecen n variables proposicionales distintas, la tabla deberá constar de 2^n entradas o filas. Por convención, la última columna representa la evaluación de la fbf completa, para todas las posibles combinaciones de valores. En el ejemplo anterior, como en (P $\iff$ (Q $\vee$ R)) hay 3 variables proposicionales distintas ($n = 3$), así teníamos $2^3 = 8$ entradas o filas.

6. Clasificación de Fórmulas

Dadas n variables proposicionales, la cantidad de fórmulas bien formadas distintas que se pueden formar es infinita, con lo cual van a existir fórmulas bien formadas que tengan la misma tabla de verdad [4].

[4]Se puede demostrar que sólo existen 2^{2^n} tablas de verdad diferentes, para fórmulas bien formadas con n variables proposicionales distintas, aunque existan infinitas fbfs.

Definiciones:

1. Una fórmula bien formada es una **tautología** si toma el valor de verdad Verdadero para cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad de sus variables proposicionales.

   Ejemplo:

   $$(\mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P}) \text{ es una tautología}$$

   porque la columna correspondiente a la valuación de la fbf sólo tiene el valor de verdad Verdadero.

P	¬ P	(P ∨ ¬P)
V	F	V
F	V	V

   □

2. Una fórmula bien formada es una **contradicción** si para cada una de las combinaciones posibles de los valores de verdad de sus variables de proposicionales, ésta toma el valor de verdad Falso.

   Ejemplo:

   $$\mathrm{P} \wedge (\neg \mathrm{P}) \text{ es una contradicción}$$

   porque la columna correspondiente a la valuación de la fbf sólo tiene el valor de verdad Falso.

P	¬ P	(P ∧ ¬P)
V	F	F
F	V	F

   □

3. Una fórmula bien formada es **consistente** si al menos tiene una interpretación verdadera, es decir si para al menos una de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables proposicionales la fórmula se evalúa con el valor de verdad Verdadero.

   Ejemplo:

   $$(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \text{ es consistente}$$

   porque en la columna correspondiente a la valuación de la fbf aparece el valor de verdad Verdadero.

P	Q	(P ∨ Q)
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   □

4. Una fórmula bien formada es una **contingencia** si no es ni una tautología ni una contradicción. Es decir, al menos en una de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables proposicionales la fórmula se evalúa con el valor de verdad Verdadero y al menos en una se evalúa con el valor de verdad Falso[5].

   Ejemplo:

   $$(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \text{ es una contingencia}$$

   porque algunas veces se evalúa como verdadera (lo que la hace consistente) y una vez se evalúa como falsa cuando P y Q toman el valor de verdad Falso. Para verificarlo observar la tabla de verdad ya ilustrada.

   □

Definición:

Sean P y Q dos fórmulas bien formadas decimos que:

1. P implica lógicamente a Q, si $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q})$ es una tautología.
2. P es lógicamente equivalente a Q, si $(\mathrm{P} \iff \mathrm{Q})$ es una tautología. Se utiliza el símbolo $\equiv$ entre dos fbfs P y Q cualesquiera, para indicar si ellas son lógicamente equivalentes; es decir, que si $(\mathrm{P} \iff \mathrm{Q})$ es una tautología, se denota como $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$.

Claramente, siendo P y Q dos fbfs tales que $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$ (es decir, $(\mathrm{P} \iff \mathrm{Q})$ es una tautología), entonces se cumple que P implica lógicamente a Q y viceversa. Queda como ejercicio para el lector mostrar que esto es cierto, usando la información de la tabla de verdad de $(\mathrm{P} \iff \mathrm{Q})$.

[5]Si una fbf es una contingencia es también consistente.

Ejemplo:

Dadas las siguientes fórmulas bien formadas ($\neg$ P $\vee$ Q) y (P $\Rightarrow$ Q), podemos decir que son lógicamente equivalentes porque ($\neg$ P $\vee$ Q) $\Longleftrightarrow$ (P $\Rightarrow$ Q) es una tautología:

P	Q	$\neg$ P	($\neg$ P $\vee$ Q)	(P $\Rightarrow$ Q)	(($\neg$ P $\vee$ Q) $\Longleftrightarrow$ (P $\Rightarrow$ Q))
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Entonces, como ($\neg$ P $\vee$ Q) $\Longleftrightarrow$ (P $\Rightarrow$ Q) es una tautología, ($\neg$ P $\vee$ Q) $\equiv$ (P $\Rightarrow$ Q) y por lo tanto ($\neg$ P $\vee$ Q) implica lógicamente a (P $\Rightarrow$ Q) y también (P $\Rightarrow$ Q) implica lógicamente a ($\neg$ P $\vee$ Q).

Además, dadas las fórmulas (P $\wedge$ $\neg$P) y (P $\vee$ $\neg$P), podemos decir que (P $\wedge$ $\neg$P) implica lógicamente a (P $\vee$ $\neg$P), porque ((P $\wedge$ $\neg$P) $\Rightarrow$ (P $\vee$ $\neg$P)) es una tautología:

P	$\neg$ P	(P $\wedge$ $\neg$P)	(P $\vee$ $\neg$P)	((P $\wedge$ $\neg$P) $\Rightarrow$ (P $\vee$ $\neg$P))
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V

$\square$

Ejemplo:

En particular, siendo P y Q dos fbfs, se dice que (P $\Rightarrow$ Q) es una *implicación*, entonces (Q $\Rightarrow$ P) es la *recíproca*, ($\neg$P $\Rightarrow$ $\neg$Q) es la *inversa* y ($\neg$Q $\Rightarrow$ $\neg$P) es la *contrarecíproca*. Las tablas de verdad para estas fórmulas son:

P	Q	(P $\Rightarrow$ Q)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	(Q $\Rightarrow$ P)
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

P	Q	($\neg$P $\Rightarrow$ $\neg$Q)
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

P	Q	($\neg$Q $\Rightarrow$ $\neg$P)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Puede observarse que las fórmulas de la implicación (P$\Rightarrow$Q) y su contrarecíproco ($\neg$Q $\Rightarrow$ $\neg$P)) son lógicamente equivalentes: (P$\Rightarrow$Q) $\equiv$ ($\neg$Q $\Rightarrow$ $\neg$P), mientras que también el recíproco (Q$\Rightarrow$P) y la inversa ($\neg$P $\Rightarrow$ $\neg$Q) son también lógicamente equivalentes: (Q$\Rightarrow$P) $\equiv$ ($\neg$P $\Rightarrow$ $\neg$Q).

$\square$

7. Jerarquía de los Conectivos

Como se mencionó anteriormente, se utilizan los paréntesis de manera tal de que la valuación de una fbf sea única; es decir, los paréntesis establecen el orden de evaluación de la fórmula. Por lo tanto, si queremos evaluar $((P \Rightarrow Q) \vee \neg R)$, debemos conocer primero $(P \Rightarrow Q)$, para luego obteniendo $\neg R$ poder finalmente calcular el valor de verdad de la fórmula. Sin embargo, como también se mencionó, si no se utilizan todos los paréntesis (por ahorro de escritura) se deben dar reglas que aseguren que exista una única manera de evaluar cada expresión para poder determinar el valor de verdad de una proposición compuesta. Así, conociendo esas reglas se pueden obviar algunos paréntesis e igualmente determinar si la proposición completa es verdadera o falsa.

Por lo tanto, al tener fórmulas con dos o más conectivos y faltando algunos paréntesis, se deben conocer la precedencia o jerarquía (las que dan las prioridades) y las propiedades de asociatividad de los conectivos para asegurar que la evaluación sea la correcta.

Ejemplo:

Si se desea evaluar el valor de verdad de la siguiente expresión:

$$P \Longleftrightarrow Q \vee R$$

en comienzo no se sabría a cuál de dos fbfs representa:

1. $(P \Longleftrightarrow (Q \vee R))$, o
2. $((P \Longleftrightarrow Q) \vee R)$.

porque si se observan las tablas de verdad correspondientes:

P	Q	R	$(Q \vee R)$	$(P \Longleftrightarrow (Q \vee R))$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	V

P	Q	R	$(P \Longleftrightarrow Q)$	$((P \Longleftrightarrow Q) \vee R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

se puede notar que sus tablas de verdad son completamente distintas. Entonces para evaluar la expresión $P \Longleftrightarrow Q \vee R$, ¿cuál seria la tabla correcta?

□

Para que quede en cualquier caso determinada la interpretación de cualquier fórmula se establece la siguiente jerarquía de conectivos:

$$\neg, \wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow, \Longleftrightarrow$$

donde $\neg$ (negación) es el conectivo con mayor jerarquía en la secuencia y $\Longleftrightarrow$ (bicondicional) es el conectivo con el menor peso.

Ejemplo:

Ahora si se quiere evaluar la expresión P $\Longleftrightarrow$ Q $\vee$ R, considerando la jerarquía de los conectivos, se debe evaluar en el siguiente orden:

P	Q	R	Q $\vee$ R	P $\Longleftrightarrow$ Q $\vee$ R
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	V

es decir, como indican la jerarquía, primero se evalúa el conectivo $\vee$ con las variables proposicionales Q y R, para luego evaluar el conectivo $\Longleftrightarrow$ con la variable proposicional P y la expresión Q $\vee$ R.

□

Sin embargo, no basta sólo con conocer la prioridad de los conectivos para poder evaluar correctamente una expresión sin paréntesis. Si se tiene por ejemplo la expresión P $\vee$ Q $\vee$ R, los dos conectivos utilizados tienen el mismo nivel de jerarquía y entonces, como hay que evaluarlos en algún orden, se debería decidir entre órdenes de evaluación: ((P $\vee$ Q)$\vee$ R) o (P $\vee$(Q $\vee$ R)). Sin embargo, gracias a las reglas de asociatividad de los distintos conectivos binarios, da lo mismo cuál de los órdenes se usa porque son lógicamente equivalentes. Queda como ejercicio para el lector verificar que las tablas de verdad de las dos fbfs: ((P $\vee$ Q)$\vee$ R) y (P $\vee$(Q $\vee$ R)) son iguales[6], o que (((P $\vee$ Q)$\vee$ R) $\Longleftrightarrow$ (P $\vee$(Q $\vee$ R))) es una tautología.

Existen además algunas otras reglas que facilitan el proceso de evaluación de las fórmulas bien formadas, conocidas como:

[6]Porque ((P $\vee$ Q)$\vee$ R) $\equiv$ (P $\vee$(Q $\vee$ R)).

Leyes de DeMorgan

Dado un número cualquiera de fórmulas bien formadas $P_1 \ldots P_n$ y utilizando los símbolos $\bigvee_{i=1}^{n}$ (o $\bigwedge_{i=1}^{n}$) para abreviar la aplicación del mismo conectivo $\vee$ entre todas las fbfs (o respectivamente $\wedge$) [7]. No son necesarios los paréntesis internos en la forma abreviada, por que ambos conectivos cumplen con la propiedad asociativa.

$\bigvee_{i=1}^{n}(\neg\ P_i)$ es lógicamente equivalente $\neg\ (\bigwedge_{i=1}^{n}\ P_i)$

$\bigwedge_{i=1}^{n}(\neg\ P_i)$ es lógicamente equivalente $\neg\ (\bigvee_{i=1}^{n}\ P_i)$

8. Conjunto Adecuado de Conectivos

Un conjunto adecuado de conectivos es un conjunto tal que toda proposición puede representarse por medio de una fórmula bien formada en la que sólo aparezcan conectivos de dicho conjunto.

Proposición:

- Los pares $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \Rightarrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivos.

Para demostrar que esto es cierto para alguno de los conjuntos dados basta con probar que se pueden obtener las mismas tablas de verdad que la de los conectivos ausentes en el conjunto, con fórmulas equivalentes que sólo usen conectivos del conjunto.

Ejemplo:

Dado que $\{\neg, \vee\}$ es un conjunto adecuado de conectivos, cualquier proposición se puede expresar usando solamente sus conectivos, haciendo uso además de las equivalencias lógicas (las que no se hayan mostrado aún en el presente material de estudio, pueden comprobarse haciendo uso de las correspondientes tablas de verdad).

$$(\ P \iff Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)) \equiv ((\neg\ P \vee Q) \wedge (\neg\ Q \vee P)) \equiv (\neg\ (\neg\ P \vee Q) \vee \neg\ (\neg\ Q \vee P))$$

$\square$

No es posible conseguir un conjunto de menor cardinalidad que los exhibidos como conjuntos adecuados de conectivos, siempre y cuando nos manejemos con los conectivos aquí definidos, dado que si a alguno de los conjuntos se le trata de eliminar uno de sus conectivos, no se lograrán expresar algunas fbfs sólo con el conectivo restante.

[7] Por ejemplo, si tenemos la fbf $((P_1 \vee\ P_2) \vee\ P_3)$, siendo P_1, P_2 y P_3 fbfs cualesquiera, con la notación abreviada podríamos reescribirla como $(\bigvee_{i=1}^{3}\ P_i)$.

Ejemplo:

Si se considera el conjunto $\{\neg, \vee\}$, se puede verificar que sólo con el conectivo del conjunto $\{\neg\}$, no podemos expresar ninguna fórmula que sea equivalente a (P $\vee$ Q), siendo P y Q fbfs cualesquiera. Similarmente, se puede verificar que sólo con el conectivo del conjunto $\{\vee\}$, no podemos expresar ninguna fórmula que sea equivalente a $\neg$ P, siendo P una fbf cualquiera.

□

9. Formulación de las frases

Dado que no es el significado del enunciado lo que interesa sino la forma en que éste se expresa, es necesario estudiar la forma en que se va a formular una idea de modo que ésta exprese siempre lo que se desea. Existen en castellano algunos patrones de conformación de conectivas, conocido como **Modelado de frases**, que permiten representar formalmente la misma estructura de las frases.

$\neg$ No P Es falso que P	**P $\Rightarrow$ Q** Si P entonces Q Q si P Si P, Q P suficiente para Q Q necesario para P No P a menos que Q P sólo si Q
P $\wedge$ Q P y Q P porque Q P pero Q Ambos, P y Q P, sin embargo Q P, además de Q	**P $\Longleftrightarrow$ Q** P si y sólo si Q P necesario y suficiente para Q P si y solamente si Q P únicamente Q
P $\vee$ Q P o Q Bien P o Q P a menos que Q P o Q o ambos Al menos P o Q	**P $\veebar$ Q** O P o Q P o Q, pero no ambos O bien P, o bien Q

10. Circuitos Lógicos

Las propiedades del cálculo proposicional son equivalentes a las del álgebra desarrollada por Boole, un matemático inglés quien propuso los principios básicos del álgebra de Boole en 1854).

En el álgebra booleana una proposición es equivalente a una variable y las conectivas lógicas se asocian a compuertas lógicas.

Compuertas Lógicas: Debido a que una proposición puede ser evaluada y resultar sólo verdadera o falsa, se puede deducir alguna equivalencia con el álgebra booleana, que maneja solamente dos valores (0 y 1).

Los esquemas que resultan de aplicar las compuertas lógicas se conocen como circuitos lógicos.

Una fórmula del cálculo proposicional se puede representar gráficamente usando compuertas lógicas.

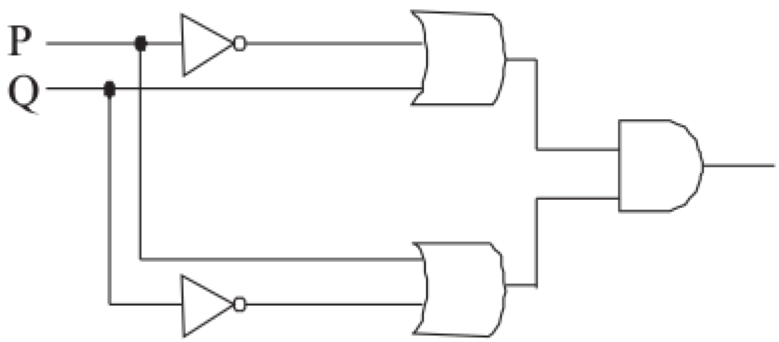


Figura 1: $P \iff Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

Como se observa en el circuito, para representar fórmulas con condicionales o bicondicionales se la debe transformar en fórmulas equivalentes pero usando conectivas que permitan su representación.

10.1. Lógica Digital

El conjunto de circuitos digitales en las computadoras y demás sistemas digitales se diseña y se analiza con el uso del álgebra de Boole. El funcionamiento de las computadoras se basa en la memorización y procesamiento de datos binarios. La implementación de la memoria y procesamiento se realiza usando lógica digital y especialmente circuitos combinacionales y secuenciales.

- <u>Circuitos combinacionales</u>: Su salida depende solamente de la combinación de las entradas.
- <u>Circuitos secuenciales</u>: Su salida depende de la combinación de las entradas y del estado anterior (estos son los usados en la memoria).

En la siguiente tabla se pueden observar las compuertas lógicas que representan las distintas funciones algebraicas así como sus respectivos nombres y tablas de verdad.

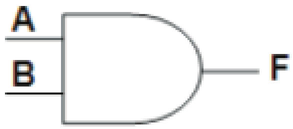
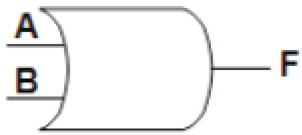
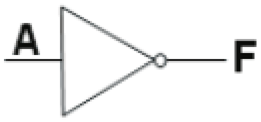
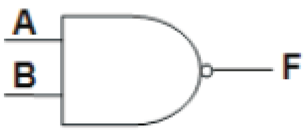
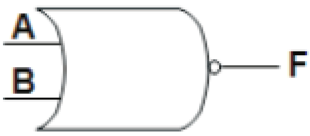
Nombre	***Símbolo***	***Función Algebraica***	***Tabla de Verdad***
AND		$F = (A * B) \equiv A \wedge B$	A B | F 1 1 | 1 1 0 | 0 0 1 | 0 0 0 | 0
OR		$F = (A + B) \equiv A \vee B$	A B | F 1 1 | 1 1 0 | 1 0 1 | 1 0 0 | 0
NOT		$F = \overline{A} \equiv \neg A$	A | F 1 | 0 0 | 1
NAND		$F = \overline{(A * B)} \equiv \neg(A \wedge B)$	A B | F 1 1 | 0 1 0 | 1 0 1 | 1 0 0 | 1
NOR		$F = \overline{(A + B)} \equiv \neg(A \vee B)$	A B | F 1 1 | 0 1 0 | 0 0 1 | 0 0 0 | 1

Figura 2: Compuertas Lógicas

El siguiente circuito es una parte componente de la ALU (Unidad Aritmética-Lógica) encargada de las operaciones aritmético-lógicas de la CPU y se denomina Semisumador binario de 2 bits.

Analizando las salidas: Suma y Acarreo

$Suma = (\overline{A} * B) + (A * \overline{B})$

$Acarreo = (A * B)$

A	B	Suma	Acarreo
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

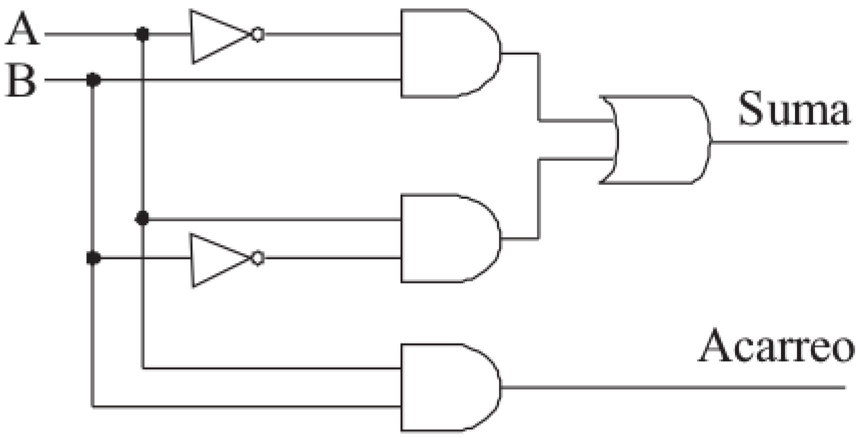


Figura 3: Semisumador (Suma y Acarreo)