Lógica – Parte I

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y ALGORITMOS

Ingeniería en Computación
Ingeniería en Informática

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
AÑO 2017

Índice

1. Introducción a la Lógica Proposicional

Existen en la realidad un número considerable de problemas con los que una persona se enfrenta y de los cuales se deben deducir ciertos datos para poder resolverlos. Generalmente, la forma en que las personas aplican el poder deductivo es muy personal, sin embargo éste podría ser encausado o guiado a través del uso de reglas de deducción. A su vez, será necesario que dichas reglas sean establecidas y usadas con una cierta precisión de modo que puedan ser reutilizadas toda vez que un mismo problema o problemas de características similares sean planteados.

La manera cotidiana de expresar los problemas es por medio de nuestro lenguaje natural. Sin embargo, éste es en esencia ambiguo por lo cual es necesario transformarlo, acotarlo o restringirlo de modo que se convierta en un lenguaje inequívoco. Particularmente, los lenguajes simbólicos proveen esa clase de precisión. Si además esos símbolos son símbolos matemáticos, lo que tendremos es una precisión matemática en la acción de deducir. Ésta es precisamente la finalidad de la **lógica matemática**: *expresar problemas por medio de un lenguaje inequívoco que habilite el uso de reglas de deducción para la solución de los mismos*.

2. Proposiciones y Conectivas

Nuestro lenguaje cotidiano se conforma de frases o expresiones o enunciados. Si se desea deducir información a partir de una frase es necesario poder evaluarla como verdadera o falsa. Por ejemplo, si consideramos las siguientes frases:

4 es un número par
11 es un número par

se puede decir que la primera es verdadera y que la segunda es falsa. Sin embargo, para frases como:

Nunca he fumado un cigarrillo
El partido de rugby terminó empatado

a pesar de que no somos capaces de decidir si ellas son verdaderas o falsas, porque dependiendo de quién las diga o en qué contexto podrían ser o verdaderas o falsas, podemos asegurar que seremos capaces de evaluarlas en una situación particular como verdaderas o falsas. Esto se debe a que en nuestro lenguaje coloquial hay una gran parte de la información que está impl?cita. No obstante, no toda frase puede ser evaluada, existen frases las cuales no se pueden categorizar.

Frases categorizables	Frases NO categorizables
El líder ha muerto.	¡Qué frío!
Juan compró dulces con dinero.	¿Cuánto pesas?
El barómetro ayuda a determinar el clima.	Alcánzame el libro
Si Juan no tiene dinero entonces no compra dulces.	Para continuar presione ENTER
Si el barómetro desciende, entonces lloverá o nevará.	
13 es un número primo	

Generalizando diremos que toda frase que tiene una función de tipo informativa, es una frase que se puede categorizar, quedando entonces fuera todas aquellas frases que cumplen una función de transmitir una orden o directriz y las que se utilizan con una función expresiva. Por lo tanto, las frases exclamativas, las interrogativas y las imperativas no son categorizables. Así, desde el punto de vista gramatical, una *proposición* es lo que se denomina una oración *declarativa* (en contraste con las oraciones interrogativas, exclamativas o imperativas).

Si se analiza gramaticalmente una frase o expresión del lenguaje cotidiano, veremos que éstas pueden clasificarse como frases simples o compuestas. Las frases simples constan de un sujeto y un predicado. Las frases compuestas se conforman a partir de las frases simples unidas por elementos gramaticales especiales que las asocian (conjunciones).

Considerando estos conceptos y con la intención de lograr un lenguaje menos ambiguo es que, como primera medida, se restringe el mismo a solamente el conjunto de frases categorizables (proposiciones), estableciendo el siguiente supuesto básico:

Toda frase simple puede evaluarse o categorizarse como verdadera o falsa.

Como segunda medida tendiente a lograr un lenguaje aún más preciso, se acuerda adoptar una nueva terminología y representación o simbología asociada.

Esto es, llamar:

- a las frases: **proposiciones** (ya sea simples o compuestas según corresponda)
- a los elementos gramaticales que unen a las frases simples: **conectivos**

Y establecer como símbolos:

- para representar las proposiciones (simples o compuestas): las letras mayúsculas
- para representar los conectivos, símbolos tales como: $\Longleftrightarrow \; \Rightarrow \; \vee \; \wedge \; \neg$

Por lo tanto, para poder construir enunciados acerca del mundo real se hará uso de un lenguaje formal, acotado y más limitado que el lenguaje natural, mediante el cual se podrán escribir proposiciones (simples y compuestas) con los que se denotarán hechos acerca del mundo real.

Cuando un enunciado del lenguaje natural se representa por medio de la simbología asociada, lo que queda bosquejado es la estructura o esqueleto lógico del mismo; es decir, la **forma** que tiene dicho enunciado o conjunto de enunciados. Dicha forma es la que nos va a permitir realizar nuestras deducciones sin tener en cuenta el significado asociado.

Teniendo en cuenta esta última afirmación, analicemos el siguiente ejemplo:

Caso 1:

- Si Sócrates es hombre entonces es mortal.

De este enunciado claramente se puede deducir que, como sabemos que Sócrates es hombre, éste es también mortal.

Caso 2:

- Si Sócrates es hombre, mortal es.

Caso 3:

- Sócrates es hombre.
- Sócrates es mortal.

En los casos 2 y 3 se podría llegar a deducir lo mismo que en el caso 1 (no obstante tener dos enunciados en el caso 3) pero haciendo uso de reglas gramaticales y del significado por nosotros conocido asociado a las palabras y en algunos casos nuestros conocimientos previos; con lo cual no se estaría considerando la intención arriba establecida de que: *la estructura del enunciado debe permitirme inferir una información particular*.

La manera correcta en que esta deducción podría hacerse, considerando sólo que la estructura de los enunciados me permita hacer la inferencia de la información particular sobre que Sócrates es mortal sería:

Caso Correcto: estableciendo las siguientes proposiciones como ciertas:

- Sócrates es hombre.
- Los hombres son mortales. podemos concluir que:
- Sócrates es mortal.

En la **Lógica Formal** se estudian los principios y métodos a través de los cuales a partir de la validez de los argumentos, desde el punto de vista solamente de su estructura, sin tomar en cuenta el contenido semántico de las expresiones de los argumentos, se determina la validez de la conclusión. De esta manera si se argumenta que:

- *Todos los majadíes son de Majadistán.*
- *Rudistein es majadí.*
- *En consecuencia, Rudistein es de Majadistán.*

En este argumento, no se toma en cuenta si los majadíes son humanos, perros, pericos o un concepto abstracto de cualquier área. Tampoco importa si Rudinstein es un ciudadano de alguna ciudad del mundo o si es el nombre de un perro. De esta manera desde el punto de vista de su estructura esta argumentación es válida.

Se hace hincapié en que la Lógica **no** se hace responsable de su aplicación a nivel semántico. Se puede decir que la Lógica es una herramienta para el análisis de la veracidad de argumentaciones en base sólo a la estructura de éstas, donde el significado de los elementos que intervienen no es tomado en cuenta.

La argumentación anterior tiene dos partes principales:

Las premisas:

- *Todos los majadíes son de Majadistán*.
- *Rudistein es majadí*.

La conclusión:

- *Rudistein es de Majadistán*.

De esta manera la argumentación es válida, ya que de las premisas sigue la conclusión, lo cual hasta cierto punto nos parece totalmente natural.

Consideremos el siguiente argumento:

- *Argentina está en África o Argentina está en Asia*.
- *Argentina no está en Asia*.
- En consecuencia, *Argentina está en África*.

Nuevamente esta argumentación es válida desde el punto de vista lógico, aún cuando se sabe que la **conclusión** es **falsa**, porque conocemos que *Argentina está en América*. ¿Cómo puede ser esto? ¿A partir de la Lógica se pueden obtener conclusiones equivocadas?

La respuesta es afirmativa, ya que la Lógica no verifica si el significado de las premisas es correcto o no.

Debido a lo anterior es necesario distinguir entre *proposiciones verdaderas* y *proposiciones lógicamente verdaderas*. Las primeras son verdaderas por su significado e independientemente de su estructura, mientras que las segundas no necesariamente lo son.

De esta manera, las proposiciones:

- *Argentina está en África o Argentina está en Asia*
- *Argentina está en África*

Son verdaderas lógicamente debido a que la primera es una premisa y a que la segunda ha sido derivada lógicamente de sus premisas.

Concluyendo, es necesario poder lograr deducir información solamente a través de la forma de los enunciados. De esta manera, se asegura la independencia del significado que un enunciado posea. Es prioritario entonces, estudiar las **formas enunciativas**, es decir, *la forma en que se va a formular una idea de modo que ésta exprese siempre lo que se desea*. En consecuencia, **no es el significado del enunciado lo que interesa sino la forma en que éste se expresa**.

Generalizando dicho concepto y formalizándolo, se podría decir que:

- Dadas las letras A, B, C, éstas representan a cualquier enunciado y se las denomina *variables de enunciado* o *variables proposicionales*.
- Toda variable proposicional es **verdadera** o **falsa**.

- Dada una proposición que se liga con cualquier otra proposición a través de un conectivo, esta ligadura debe darme como resultado una tercera proposición.
- Si toda proposición simple es verdadera (o falsa) entonces toda proposición enunciativa compuesta, constituida a partir de proposiciones simples, es también verdadera (o falsa) y sus valores surgen a partir de los valores de las proposiciones que las componen.

3. Proposiciones Compuestas y Tablas de Verdad

Resta entonces analizar cada una de los conectivos que me permiten armar proposiciones compuestas y cómo éstos deben ser interpretados, para que toda vez que una misma proposición de características similares sea planteada ésta se evalúe de la misma manera. Esto es, ver cuáles son las reglas que en forma inequívoca y precisa me permitan deducir los valores de verdad para las variables proposicionales que representan proposiciones compuestas. Por convención para representar el valor de verdad *verdadero* se utiliza la letra mayúscula **V** y para el valor de verdad *falso* la letra mayúscula **F**. En alguna bibliografía, en su lugar se utiliza $\top$ para *verdadero* y $\perp$ para *falso*.

Negación

Se podría decir que es un conectivo particular o especial puesto que en lugar de relacionar dos proposiciones, afecta solamente a la proposición a la cual se encuentra asociada [1].

Si se tiene una proposición cualquiera A, su negación es otra proposición $\neg$ A. Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, el conectivo de negación está representado por la palabra “no”, por lo tanto toda vez que ésta se une a cualquier frase simple categorizable, la misma produce un cambio de categoría a dicha frase (si era verdadera, pasará a ser falsa y viceversa).

Ejemplo: Iré a verte mañana si la categorizara como verdadera. *No iré a verte mañana* cambiaría la categoría de la frase a falsa.

□

Si se expresa dicho enunciado en forma general por medio de una variable proposicional, digamos **P** tendremos: Sea **P** una variable proposicional (o variable de enunciado), su negación es $\neg$ **P** y la tabla de posibles valores que la misma puede adoptar es la siguiente:

P	$\neg$ P
V	F
F	V

Esta tabla se denomina **Tabla de Valores de Verdad** y es considerada como la definición de dicho conectivo.

[1] En este caso, por sólo afectar a una proposición, se lo denomina conectivo *unario*. Los demás conectivos se denominan *binarios*, por conectar a dos proposiciones.

Conjunción

Si se tiene una proposición compuesta A conformado por dos proposiciones, supongamos B y C, unidas por medio del conectivo conjunción ($\wedge$), la proposición A tomará valores de verdad **verdadero** solamente cuando ambas proposiciones que la componen son **verdaderas**. Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, el conectivo de conjunción está generalmente representado por la palabra "y", y es la palabra cuya función más claramente se asocia con el significado que le otorgamos.

Ejemplo:

$$\text{La proposición compuesta } \underbrace{\textit{“Juan vino y Pedro se fue”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por las proposiciones simples } \underbrace{\textit{“Juan vino”}}_{\text{B}} \text{ y } \underbrace{\textit{“Pedro se fue”}}_{\text{C}}.$$

□

Lo anterior se puede expresar en forma general por medio de las siguientes variables poposicionales y su correspondiente tabla o regla de composición. Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales, (**P** representando a B y **Q** representando a C) los valores de verdad que adoptará la proposición A (representado simbólicamente por **P** $\wedge$ **Q**) son:

P	Q	P $\wedge$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esta tabla es la tabla de valores de verdad para el conectivo $\wedge$.

Disyunción

Si se tiene una proposición compuesta A conformada por dos proposiciones, supongamos B y C, unidas por medio del conectivo disyunción ($\vee$), la proposición A tomará valores de verdad verdadero solamente cuando una de las proposiciones que la componen sea verdadera; con lo cual, si ambas son verdaderas ya se da por cumplida la condición establecida por el conectivo. Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, el conectivo de disyunción está generalmente representado por la palabra "o".

Ejemplo:

$$\text{La proposición compuesta } \underbrace{\textit{“Estudiaré música o estudiaré canto”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por los proposiciones simples } \underbrace{\textit{“Estudiaré música”}}_{\text{B}} \text{ y } \underbrace{\textit{“Estudiaré canto”}}_{\text{C}}$$

□

Lo anterior se puede expresar en forma general por medio de variables proposicionales y su correspondiente tabla o regla de composición. Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales, (**P** representando a B y **Q** representando a C) los valores de verdad que adoptará la proposición A (representada simbólicamente por **P** ∨ **Q**) son:

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional

Existe en nuestro lenguaje cotidiano, la posibilidad de armar frases compuestas de tipo condicional, es decir, proposiciones condicionales que llevan implícita una implicación material o condición material entre dos proposiciones simples. Estas proposiciones suelen expresarse por medio del conectivo "si .... entonces" que relaciona dos proposiciones; la que se encuentra detrás de la palabra "si" se denomina *antecedente* y la que sigue a la palabra "entonces" se denomina *consecuente*.

Ejemplo:

$$\text{La proposición compuesta } \underbrace{\textit{“}\textbf{\textit{Si}}\textit{ me levanto temprano, }\textbf{entonces}\textit{ tomaré el tren de las ocho”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por las prposiciones simples } \underbrace{\textit{“me levanto temprano”}}_{\text{B}} \text{ y } \underbrace{\textit{“tomaré el tren de las ocho”}}_{\text{C}}$$

□

Si se tiene una proposición compuesta A conformada por dos proposiciones, supongamos B y C, unidas por medio del conectivo condicional, resta analizar cuándo la proposición A tomará valores de verdad verdadero. Para ello se hará un análisis de las posibles situaciones que se pueden presentar con el ejemplo planteado.

- Si es verdad que *me levanto temprano* y no es cierto que *tomaré el tren de las ocho*, diremos que el condicional es falso; es decir, si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, el condicional es falso.
- En cambio, si es verdad que *me levanto temprano*, y también lo es que *tomaré el tren a las ocho*, diremos sin duda que el condicional es verdadero; o sea, si el antecedente y consecuente son verdaderos, el condicional es verdadero.

Se podría decir qu éstos son los casos más comunes que se pueden producir y los cuales se pueden analizar en forma intuitiva. Para completar el análisis, sobre las cuatro combinaciones posibles para los valores de verdad que pueden tomar las dos proposiciones simples, quedan por analizar dos casos: cuando el antecedente es falso y el consecuente verdadero, y cuando ambos son falsos. Condicionales con antecedentes falsos resultan raros o sin sentido en el lenguaje ordinario y por eso es difícil inferir qué valores de verdad le corresponden. La lógica resuelve considerar verdaderos estos dos condicionales; es decir, que si el antecedente es falso no es necesario considerar el valor de verdad asociado al consecuente porque siempre la proposición será verdadera. Ello no es totalmente arbitrario ni entra en conflicto con el lenguaje ordinario, sino que más bien completa lo que éste deja sin decidir.

Lo anterior se puede expresar por medio de las siguientes variables proposicionales y su correspondiente tabla o regla de composición. Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales, (**P** representandas a B y **Q** representando a C):

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

Otro tipo de proposición compuesta es el bicondicional, que se forma usualmente en nuestro lenguaje cotidiano con la conectiva "sí y sólo sí", como en la frase *"Jugaremos a las cartas sí y sólo sí reunimos cuatro personas"*, entonces tendremos:

$$\text{La proposición compuesta } \underbrace{\textit{“Jugaremos a las cartas sí y sólo sí reunimos cuatro personas”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por las proposiciones simples } \underbrace{\textit{“Jugaremos a las cartas”}}_{\text{B}} \text{ y } \underbrace{\textit{“reunimos cuatro personas”}}_{\text{C}}$$

Los componentes del bicondicional reciben el nombre de componente izquierdo (en el ejemplo sería la proposición representada por B) y componente derecho (en el ejemplo la proposición representada por C) y el símbolo que representa el "sí y sólo sí" es $\Longleftrightarrow$.

Como su nombre lo indica, el bicondicional es un condicional doble. B **sí y sólo sí** C (en símbolos B $\Longleftrightarrow$ C) que equivale a la conjunción de **si** B **entonces** C y **si** C **entonces** B. La primer componente se puede simbolizar B ⇒ C y la segunda C ⇒ B, por lo que el bicondicional resulta equivalente al esquema (B ⇒ C) ∧ (C ⇒ B), que es la conjunción de dos condicionales, donde el antecedente del primero es el consecuente del segundo , y el consecuente del primero es el antecedente del segundo. O lo que es lo mismo, por conmutatividad del conectivo conjunción, (C ⇒ B) ∧ (B ⇒ C).

Resta entonces ver, dada una proposición compuesta A conformada por dos proposiciones B y C, unidas por medio del conectivo bicondicional ($\Longleftrightarrow$), cuándo la proposición A tomará valores de verdad verdadero o falso: si uno de sus componentes es verdadero y el otro falso, el bicondicional es falso, y es verdadero cuando ambos componentes son verdaderos, o ambos son falsos; es decir, que el bicondicional es verdadero siempre que ambas proposiciones tengan el mismo valor de verdad. A igual conclusión podría llegarse si se evaluara cualquiera de las dos proposiciones equivalentes (B ⇒ C) ∧ (C ⇒ B) o (C ⇒ B) ∧ (B ⇒ C) (queda como ejercicio para el lector realizar la comprobación, realizando las correspondientes tablas de valores de verdad de las dos proposiciones equivalentes).

Lo anterior se puede expresar por medio de variables proposicionales y su correspondiente tabla o regla de composición. Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales, (**P** representando a B y **Q** representando a C):

P	Q	P $\Longleftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

4. El Lenguaje de la Lógica Proposicional

Hasta ahora se ha analizado el significado de las proposiciones compuestas a partir del valor de verdad asociado a cada una de las proposiciones simples que las conforman, dando para ello las tablas de verdad correspondientes a cada uno de los conectivos del lenguaje. Sin embargo, se debe también analizar formalmente cómo se deben armar correctamente las proposiciones, de manera tal que haya una única manera de interpretarlas. Las reglas necesarias para escribir correctamente una proposición conforman lo que se denomina *sintaxis del lenguaje*.

Como ya se mencionó, las proposiciones compuestas son agrupaciones de proposiciones simples (también llamadas átomos) unidas por conectivos lógicos. Para construir proposiciones, se requiere entonces de un conjunto de reglas que establecen la manera de escribir una proposición correcta. A las proposiciones obtenidas haciendo uso de estas reglas se las denomina fórmulas bien formadas (fbfs).

Se tiene definido, para escribir una fórmula bien formada, un alfabeto con los símbolos que pueden utilizarse. Una fbf sólo puede contener símbolos del siguiente conjunto: letras mayúsculas que representen variables proposicionales[2], los conectivos lógicos (en nuestro caso: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow$) y los paréntesis izquierdo y derecho: (,).

Las siguientes reglas permiten construir una *fórmula bien formada* (fbf):

1. Una variable proposicional es una fórmula bien formada, también llamada *fórmula atómica*[3].
2. Si P es una fórmula bien formada, $\neg$ P también es una fórmula bien formada.
3. Si P y Q son fórmulas bien formadas, (P $\wedge$ Q), (P $\vee$ Q), (P $\Rightarrow$ Q) y (P $\Longleftrightarrow$ Q) son fórmulas bien formadas.
4. Todas las fórmulas bien formadas se obtienen aplicando las reglas 1, 2 y 3.

Por lo tanto, para expresar cualquier proposición en Lógica Proposicional, se debe asociar a cada proposición simple distinta que la compone una variable proposicional que la represente y vincular dichas variables proposicionales a través de las reglas que permite incorporar los conectivos correspondientes, de manera tal de armar la fórmula bien formada que la representa.

Cabe aclarar que los paréntesis se utilizan en la escritura de las fbfs para asegurar una interpretación única del significado de las proposiciones. En caso de no usarlos habría que considerar, al interpretar la proposición, otras reglas que establezcan la prioridad o jerarquía de cada uno de los conectivos. Esta jerarquía se debe utilizar cada vez que se quiera evaluar una fórmula.

[2]Habitualmente, en la Lógica Proposicional se utiliza la letra p para representar una variable proposicional, y para dejar claro que se puede tener un conjunto posiblemente infinito (infinito numerable) de ellas, se la subindica con un número natural (es decir: $p_1, p_2, \ldots, p_{200}, \ldots$.)

[3]Se las denomina fórmulas atómicas porque las variables proposicionales representan a las proposiciones simples o átomos.

Utilizando estas reglas es posible, a partir de las fórmulas atómicas y los conectivos, construir proposiciones o fórmulas bien formadas más complejas de cualquier longitud.

Ejemplo:

Dadas las siguientes expresiones, se indica en cada caso cómo se clasifican y por qué:

A	es fórmula bien formada atómica, siendo A variable proposicional
$(P \Rightarrow Q \Rightarrow R)$	**no** es fbf, porque faltan paréntesis
$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R)$	es fbf, siendo P, Q y R variables proposicionales
$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$	es fbf, siendo P, Q y R variables proposicionales
$\neg A$	es fbf, siendo A variable proposicional
$(\neg P \wedge \neg Q)$	fbf, siendo P y Q variables proposicionales
$(P \neg\wedge Q)$	**no** es fbf, porque no se puede negar un conectivo
$\neg((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R)$	es fbf, siendo P, Q y R variables proposicionales

□

5. Evaluación de Fórmulas Bien Formadas

Hemos hablado hasta ahora de cómo se construyen correctamente las fbfs de la Lógica Proposicional. Ahora debemos analizar cómo evaluar el significado de las mismas. Para ello, se puede construir una tabla de verdad para cualquier fórmula bien formada, utilizando las tablas de verdad de los conectivos ya analizadas.

Ejemplo:

Para la siguiente fórmula bien formada, mostraremos paso a paso el avance de su evaluación:

$$(\neg (P \vee Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q))$$

de una de las posibles manera de evaluarla, considerando que se debe respetar la prioridad de evaluación que establecen los paréntesis, sería:

1) Primero se evalúa la fórmula $(P \vee Q)$:

P	Q	$(P \vee Q)$	$\neg (P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \Rightarrow \neg Q)$	$(\neg (P \vee Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q))$
V	V	V					
V	F	V					
F	V	V					
F	F	F					

2) Luego se evalúa la fórmula $\neg(P \vee Q)$:

P	Q	$(P \vee Q)$	$\neg (P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \Rightarrow \neg Q)$	$(\neg (P \vee Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q))$
V	V	V	F				
V	F	V	F				
F	V	V	F				
F	F	F	V				

3) Ahora se evalúa la fórmula $\neg P$:

P	Q	$(P \vee Q)$	$\neg (P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \Rightarrow \neg Q)$	$(\neg (P \vee Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q))$
V	V	V	F	F			
V	F	V	F	F			
F	V	V	F	V			
F	F	F	V	V			

4) Luego se evalúa la fórmula $\neg Q$:

P	Q	$(P \vee Q)$	$\neg (P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \Rightarrow \neg Q)$	$(\neg (P \vee Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q))$
V	V	V	F	F	F		
V	F	V	F	F	V		
F	V	V	F	V	F		
F	F	F	V	V	V		

5) Luego se evalúa la fórmula $(\neg P \Rightarrow \neg Q)$:

P	Q	$(P \vee Q)$	$\neg (P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \Rightarrow \neg Q)$	$(\neg (P \vee Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q))$
V	V	V	F	F	F	V	
V	F	V	F	F	V	V	
F	V	V	F	V	F	F	
F	F	F	V	V	V	V	

6) Ahora finalmente se evalúa la fórmula completa $(\neg (P \vee Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q))$:

P	Q	$(P \vee Q)$	$\neg (P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \Rightarrow \neg Q)$	$(\neg (P \vee Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q))$
V	V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V

$\square$

Aunque en el ejemplo se ha mostrado paso a paso la evaluación de la fórmula, en general se hace sobre una única tabla.

Ejemplo:

Dada la siguiente fbf $(\neg$ P $\vee$ Q$)$, su tabla de verdad será:

P	Q	¬ P	(¬ P ∨ Q)
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Dada la siguiente fbf $(\mathrm{P} \Longleftrightarrow (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}))$ y su tabla de verdad será:

P	Q	R	(Q ∨ R)	(P ⟺ (Q ∨ R))
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	V

□

Dado que la tabla de verdad de una fbf debe considerar todas las posibles combinaciones de valores de verdad para las distintas variables proposicionales, si en la fbf aparecen n variables proposicionales distintas, la tabla deberá constar de 2^n entradas o filas. Por convención, la última columna representa la evaluación de la fbf completa, para todas las posibles combinaciones de valores. En el ejemplo anterior, como en $(\mathrm{P} \Longleftrightarrow (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}))$ hay 3 variables proposicionales distintas $(n = 3)$, así teníamos $2^3 = 8$ entradas o filas.

6. Clasificación de Fórmulas

Dadas n variables proposicionales, la cantidad de fórmulas bien formadas distintas que se pueden formar es infinita, con lo cual van a existir fórmulas bien formadas que tengan la misma tabla de verdad[4].

Definiciones:

1. Una fórmula bien formada es una **tautología** si toma el valor de verdad <u>Verdadero</u> para cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad de sus variables proposicionales.

[4]Se puede demostrar que sólo existen 2^{2^n} tablas de verdad diferentes, para fórmulas bien formadas con n variables proposicionales distintas, aunque existan infinitas fbfs.

Ejemplo:

$$(P \vee \neg P) \text{ es una tautología}$$

porque la columna correspondiente a la valuación de la fbf sólo tiene el valor de verdad Verdadero.

P	¬ P	(P ∨ ¬P)
V	F	V
F	V	V

□

2. Una fórmula bien formada es una **contradicción** si para cada una de las combinaciones posibles de los valores de verdad de sus variables de proposicionales, ésta toma el valor de verdad Falso.

   Ejemplo:

   $$P \wedge (\neg P) \text{ es una contradicción}$$

   porque la columna correspondiente a la valuación de la fbf sólo tiene el valor de verdad Falso.

P	¬ P	(P ∧ ¬P)
V	F	F
F	V	F

   □

3. Una fórmula bien formada es **consistente** si al menos tiene una interpretación verdadera, es decir si para al menos una de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables proposicionales la fórmula se evalúa con el valor de verdad Verdadero.

   Ejemplo:

   $$(P \vee Q) \text{ es consistente}$$

   porque en la columna correspondiente a la valuación de la fbf aparece el valor de verdad Verdadero.

P	Q	(P ∨ Q)
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   □

4. Una fórmula bien formada es una **contingencia** si no es ni una tautología ni una contradicción. Es decir, al menos en una de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables proposicionales la fórmula se evalúa con el valor de verdad Verdadero y al menos en una se evalúa con el valor de verdad Falso[5].

   Ejemplo:

   $$(P \vee Q) \text{ es una contingencia}$$

[5] Si una fbf es una contingencia es también consistente.

porque algunas veces se evalúa como verdadera (lo que la hace consistente) y una vez se evalúa como falsa cuando P y Q toman el valor de verdad Falso. Para verificarlo observar la tabla de verdad ya ilustrada.

□

Definición:

Sean P y Q dos fórmulas bien formadas decimos que:

1. P implica lógicamente a Q, si $(P \Rightarrow Q)$ es una tautología.
2. P es lógicamente equivalente a Q, si $(P \Longleftrightarrow Q)$ es una tautología. Se utiliza el símbolo $\equiv$ entre dos fbfs P y Q cualesquiera, para indicar si ellas son lógicamente equivalentes; es decir, que si $(P \Longleftrightarrow Q)$ es una tautología, se denota como $P \equiv Q$.

Claramente, siendo P y Q dos fbfs tales que $P \equiv Q$ (es decir, $(P \Longleftrightarrow Q)$ es una tautología), entonces se cumple que P implica lógicamente a Q y viceversa. Queda como ejercicio para el lector mostrar que esto es cierto, usando la información de la tabla de verdad de $(P \Longleftrightarrow Q)$.

Ejemplo:

Dadas las siguientes fórmulas bien formadas $(\neg P \vee Q)$ y $(P \Rightarrow Q)$, podemos decir que son lógicamente equivalentes porque $(\neg P \vee Q) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ es una tautología:

P	Q	$\neg P$	$(\neg P \vee Q)$	$(P \Rightarrow Q)$	$((\neg P \vee Q) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q))$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Entonces, como $(\neg P \vee Q) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ es una tautología, $(\neg P \vee Q) \equiv (P \Rightarrow Q)$ y por lo tanto $(\neg P \vee Q)$ implica lógicamente a $(P \Rightarrow Q)$ y también $(P \Rightarrow Q)$ implica lógicamente a $(\neg P \vee Q)$.

Además, dadas las fórmulas $(P \wedge \neg P)$ y $(P \vee \neg P)$, podemos decir que $(P \wedge \neg P)$ implica lógicamente a $(P \vee \neg P)$, porque $((P \wedge \neg P) \Rightarrow (P \vee \neg P))$ es una tautología:

P	$\neg P$	$(P \wedge \neg P)$	$(P \vee \neg P)$	$((P \wedge \neg P) \Rightarrow (P \vee \neg P))$
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V

□

Ejemplo:

En particular, siendo P y Q dos fbfs, se dice que $(P \Rightarrow Q)$ es una *implicación*, entonces $(Q \Rightarrow P)$ es la *recíproca*, $(\neg P \Rightarrow \neg Q)$ es la *inversa* y $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ es la *contrarecíproca*. Las tablas de verdad para estas fórmulas son:

P	Q	(P ⇒ Q)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	(Q ⇒ P)
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

P	Q	(¬P ⇒ ¬Q)
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

P	Q	(¬Q ⇒ ¬P)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Puede observarse que las fórmulas de la implicación (P⇒Q) y su contrarecíproco (¬Q ⇒ ¬P)) son lógicamente equivalentes: (P⇒Q) ≡ (¬Q ⇒ ¬P), mientras que también el recíproco (Q⇒P) y la inversa (¬P ⇒ ¬Q) son también lógicamente equivalentes: (Q⇒P) ≡ (¬P ⇒ ¬Q).

□

7. Valuación de una Fórmula

Hasta ahora se han analizado los valores de verdad que puede tomar una fórmula bien formada, considerando todas las posibles combinaciones de valores de verdad para las variables proposicionales que intervienen en ella. Para ello se han utilizado las tablas de verdad. Sin embargo, en algunos casos nos interesa conocer el valor de verdad de una fórmula bien formada para una asignación particular de valores de verdad de las variables proposicionales. Si llamamos $\mathbf{Form}$ al conjunto de todas las fórmulas bien formadas y llamamos $\mathbf{B}$ al conjunto de los valores de verdad { V, F } podemos definir:

Definición:

Una **valuación**, es cualquier función $v\ :\ \mathbf{Form} \longmapsto \mathbf{B}$ que satisfaga las siguientes condiciones, donde P y Q representan fórmulas bien formadas cualesquiera:

(V1) $v(\neg P) = \neg v(P)$

(V2) $v(P \vee Q) = (v(P) \vee v(Q))$

(V3) $v(P \wedge Q) = (v(P) \wedge v(Q))$

(V4) $v(P \Rightarrow Q) = (v(P) \Rightarrow v(Q))$

(V5) $v(P \Longleftrightarrow Q) = (v(P) \Longleftrightarrow v(Q))$

Cabe destacar que las valuaciones le asignan a cada fórmula un valor de verdad, pero no de cualquier modo. Lo hacen respetando el significado de los conectivos proposicionales. De aquí resulta (y es un buen ejercicio detenerse un instante a pensarlo) que fijada una valuación las listas de símbolos que llamamos fórmulas pueden interpretarse como un conjunto de proposiciones (algunas verdaderas, algunos falsas) sujetos a las operaciones lógicas.

Una pregunta importante, directamente ligada a si se pueden expresar muchas proposiciones en el lenguaje formal que hemos definido, es la de si habrá "pocas" o "muchas" valuaciones.

Si nuestro lenguaje pretende representar combinaciones de conjuntos arbitrarios de proposiciones, sería conveniente que hubiera "muchas" valuaciones: por lo menos debería haber una para cada asignación posible de valores de verdad a las variables proposicionales. En realidad, por suerte, basta con asignar valores de verdad a cada una de las variables proposicionales que aparecen en la fórmula, para que a través de las reglas se pueda evaluar la valuación de la fórmula.

Ejemplo:

Si consideramos la fbf $((\text{P} \Rightarrow \text{Q}) \vee \text{R})$, asignando a las variables proposicionales los siguientes valores de verdad:

P	Q	R
V	V	F

tendríamos la siguiente valuación $v((\text{P} \Rightarrow \text{Q}) \vee \neg\, \text{R})$:

$$\begin{aligned} v((\text{P} \Rightarrow \text{Q}) \vee \neg \text{R}) &= v(\text{P} \Rightarrow \text{Q}) \vee v(\neg \text{R}) \\ &= (v(\text{P}) \Rightarrow v(\text{Q})) \vee \neg v(\text{R}) \\ &= (\text{V} \Rightarrow \text{V}) \vee \neg(F) \\ &= \text{V} \vee \text{V} \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

□

8. Jerarquía de los Conectivos

Como se mencionó anteriormente, se utilizan los paréntesis de manera tal de que la valuación de una fbf sea única; es decir, los paréntesis establecen el orden de evaluación de la fórmula. Por lo tanto, si queremos evaluar $v((\text{P} \Rightarrow \text{Q}) \vee \neg\, \text{R})$, debemos conocer primero $v(\text{P} \Rightarrow \text{Q})$, para luego obteniendo $v(\neg\, \text{R})$ poder finalmente calcular el valor de verdad de la fórmula. Sin embargo, como también se mencionó, si no se utilizan todos los paréntesis (por ahorro de escritura) se deben dar reglas que aseguren que exista una única manera de evaluar cada expresión para poder determinar el valor de verdad de una proposición compuesta. Así, conociendo esas reglas se pueden obviar algunos paréntesis e igualmente determinar si la proposición completa es verdadera o falsa.

Por lo tanto, al tener fórmulas con dos o más conectivos y faltando algunos paréntesis, se deben conocer la precedencia o jerarquía (las que dan las prioridades) y las propiedades de asociatividad de los conectivos para asegurar que la evaluación sea la correcta.

Ejemplo:

Si se desea evaluar el valor de verdad de la siguiente expresión:

$$\text{P} \Longleftrightarrow \text{Q} \vee \text{R}$$

en comienzo no se sabría a cuál de dos fbfs representa:

1. $(P \Longleftrightarrow (Q \vee R))$, o
2. $((P \Longleftrightarrow Q) \vee R)$.

porque si se observan las tablas de verdad correspondientes:

P	Q	R	$(Q \vee R)$	$(P \Longleftrightarrow (Q \vee R))$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	V

P	Q	R	$(P \Longleftrightarrow Q)$	$((P \Longleftrightarrow Q) \vee R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

se puede notar que sus tablas de verdad son completamente distintas. Entonces para evaluar la expresión $P \Longleftrightarrow Q \vee R$, ¿con cuál de las dos fbfs se representaría?

□

Para que quede en cualquier caso determinada la interpretación de cualquier fórmula se establece la siguiente jerarquía de conectivos:

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow$$

donde $\neg$ (negación) es el conectivo con mayor jerarquía en la secuencia y $\Longleftrightarrow$ (bicondicional) es el conectivo con el menor peso.

Ejemplo:

Ahora si se quiere evaluar la expresión $P \Longleftrightarrow Q \vee R$, considerando la jerarquía de los conectivos, se debe evaluar en el siguiente orden:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Longleftrightarrow Q \vee R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	V

es decir, como indican la jerarquía, primero se evalúa el conectivo $\vee$ con las variables proposicionales Q y R, para luego evaluar el conectivo $\Longleftrightarrow$ con la variable proposicional P y la expresión $Q \vee R$.

□

Sin embargo, no basta sólo con conocer la prioridad de los conectivos para poder evaluar correctamente una expresión que representa a una fórmula bien formada sin paréntesis. Si se tiene por ejemplo la expresión $P \vee Q \vee R$, los dos conectivos utilizados tienen el mismo nivel de jerarquía y entonces, como hay que evaluarlos en algún orden, se debería decidir entre los órdenes de evaluación de las dos fbfs: $((P \vee Q)\vee R)$ o $(P \vee(Q \vee R))$. Sin embargo, gracias a las reglas de asociatividad de los distintos conectivos binarios, da lo mismo cuál de los órdenes de las fbfs se usa porque son lógicamente equivalentes. Queda como ejercicio para el lector verificar que las tablas de verdad de las dos fbfs: $((P \vee Q)\vee R)$ y $(P \vee(Q \vee R))$ son iguales[6], o que $(((P \vee Q)\vee R) \Longleftrightarrow (P \vee(Q \vee R)))$ es una tautología.

Existen además algunas otras reglas que facilitan el proceso de evaluación de las fórmulas bien formadas, conocidas como:

Leyes de DeMorgan

Dado un número cualquiera de fórmulas bien formadas $P_1 \ldots P_n$ y utilizando los símbolos $\bigvee_{i=1}^{n}$ (o $\bigwedge_{i=1}^{n}$) para abreviar la aplicación del mismo conectivo $\vee$ entre todas las fbfs (o respectivamente $\wedge$) [7]. No son necesarios los paréntesis internos en la forma abreviada, por que ambos conectivos cumplen con la propiedad asociativa.

$\bigvee_{i=1}^{n}(\neg P_i)$ es lógicamente equivalente $\neg (\bigwedge_{i=1}^{n} P_i)$

$\bigwedge_{i=1}^{n}(\neg P_i)$ es lógicamente equivalente $\neg (\bigvee_{i=1}^{n} P_i)$

9. Conjunto Adecuado de Conectivos

Un conjunto adecuado de conectivos es un conjunto tal que toda proposición puede representarse por medio de una fórmula bien formada en la que sólo aparezcan conectivos de dicho conjunto.

Proposición:

- Los pares $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \Rightarrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivos.

Queda como ejercicio para el lector mostrar que esto es cierto para alguno de los conjuntos dados (Ayuda: basta con probar que se pueden obtener las mismas tablas de verdad que la de los conectivos ausentes en el conjunto, con fórmulas equivalentes que sólo usen conectivos del conjunto).

[6]Porque $((P \vee Q)\vee R) \equiv (P \vee(Q \vee R))$.

[7]Por ejemplo, si tenemos la fbf $((P_1\vee P_2)\vee P_3)$, siendo P_1, P_2 y P_3 fbfs cualesquiera, con la notación abreviada podríamos reescribirla como $(\bigvee_{i=1}^{3} P_i)$.

Ejemplo:

Dado que $\{\neg, \vee\}$ es un conjunto adecuado de conectivos, cualquier proposición se puede expresar usando solamente sus conectivos, haciendo uso además de las equivalencias lógicas (las que no se hayan mostrado aún en el presente material de estudio, pueden comprobarse haciendo uso de las correspondientes tablas de verdad).

$$(\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q}) \equiv ((\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P})) \equiv ((\neg \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \wedge (\neg \mathrm{Q} \vee \mathrm{P})) \equiv (\neg (\neg \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \vee \neg (\neg \mathrm{Q} \vee \mathrm{P}))$$

□

No es posible conseguir un conjunto de menor cardinalidad que los exhibidos como conjuntos adecuados de conectivos, siempre y cuando nos manejemos con los conectivos aquí definidos, dado que si a alguno de los conjuntos se le trata de eliminar uno de sus conectivos, no se lograrán expresar algunas fbfs sólo con el conectivo restante.

Ejemplo:

Si se considera el conjunto $\{\neg, \vee\}$, se puede verificar que sólo con el conectivo del conjunto $\{\neg\}$, no podemos expresar ninguna fórmula que sea equivalente a $(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$, siendo P y Q fbfs cualesquiera. Similarmente, se puede verificar que sólo con el conectivo del conjunto $\{\vee\}$, no podemos expresar ninguna fórmula que sea equivalente a $\neg$ P, siendo P una fbf cualquiera.

□

Otros Conectivos

Además de los conectivos lógicos ya definidos, existen otros que se agregan al conjunto de conectivos y que también se pueden utilizar en las fórmulas bien formadas de la Lógica Proposicional. De hecho, cualquier tabla de verdad podría emplearse para definir un conectivo, pero no siempre es sencillo asociar al mismo algún significado intuitivo. Algunos de los que aquí presentaremos son muy útiles en el diseño de circuitos digitales.

Disyunción Excluyente

Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, existe un conectivo de disyunción excluyente, simbolizado por $\veebar$ [8], que está generalmente representado por las palabras “o bien . . . , o bien . . .”, lo cual considera que esperamos que una y sólo una de las proposiciones que componen la proposición compuesta será verdadera al mismo tiempo, a diferencia de la disyunción no excluyente que es verdadera aún siendo ambas proposiciones verdaderas.

Dadas dos proposiciones P y Q, la proposición compuesta formada por $(\mathrm{P} \veebar \mathrm{Q})$ será verdadera cuando sólo una de las dos proposiciones tome el valor de verdad <u>Verdadero</u> y la otra tome el valor de verdad <u>Falso</u>.

[8] En la bibliografía también puede aparecer simbolizado por $\oplus$.

Ejemplo:

$$\text{La proposición compuesta } \underbrace{\textit{“O bien estudiaré música, o bien estudiaré canto”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por los proposiciones simples } \underbrace{\textit{“Estudiaré música”}}_{\text{B}} \text{ y } \underbrace{\textit{“Estudiaré canto”}}_{\text{C}}$$

se debe representar como una disyunción excluyente, debido a que se está expresando que sólo una de las actividades será la que se estudie. Entonces, la proposición A se puede representar por medio de variables proposicionales como $(\mathbf{P} \veebar \mathbf{Q})$, siendo **P** y **Q** dos variables proposicionales (**P** representando a B y **Q** representando a C).

□

En algunos casos se puede determinar a partir del contexto de la proposición compuesta si el conectivo a utilizar debe ser o no una disyunción excluyente, aunque la palabra que una las proposiciones simples sea la misma que la usada en una disyunción no excluyente (estén conectadas con “o”).

Ejemplo:

$$\text{La proposición compuesta } \underbrace{\textit{“Mañana Sofía cumple 16 años, o mañana Sofía cumple 17 años”}}_{\text{A}}$$

$$\text{formada por los proposiciones simples } \underbrace{\textit{“Mañana Sofía cumple 16 años”}}_{\text{B}} \text{ y } \underbrace{\textit{“Mañana Sofía cumple 17 años”'}}_{\text{C}}$$

claramente por su significado no pueden ser ambas proposiciones verdaderas al mismo tiempo, por lo tanto el conectivo a utilizar en este caso sería la disyunción excluyente. Así, la proposición A se puede representar como $(\mathbf{P} \veebar \mathbf{Q})$, siendo **P** y **Q** dos variables proposicionales (**P** representando a B y **Q** representando a C).

□

Cualquiera de las situaciones anteriores se puede expresar en forma general por medio de variables proposicionales y su correspondiente tabla o regla de composición. Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales los valores de verdad que adoptará la proposición compuesta, representada simbólicamente por $(\mathbf{P} \veebar \mathbf{Q})$, son:

P	Q	$(P \veebar Q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Negación de Conjunción

El conectivo recibe el nombre de “Nand” y se simboliza con | [9]. Este conectivo posee, para su uso en circuitos digitales, una compuerta que lo representa.

Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales cualesquiera, los valores de verdad que adoptará la fbf (**P** | **Q**) son:

P	Q	(P | Q)
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Dadas P y Q fbfs cualesquiera, las siguientes fbfs son equivalentes:

$$\neg P \equiv (P \mid P)$$
$$(P \vee Q) \equiv ((P \mid P) \mid (Q \mid Q))$$

Se puede demostrar su validez del modo usual, construyendo las correspondientes tablas de verdad, y se deja como ejercicio para el lector. En este caso podemos observar que el conjunto $\{|\}$ constituye por sí solo un conjunto adecuado de conectivos, porque sólo usando este conectivo se pueden representar los conectivos que ya formaban de por sí un conjunto adecuado (el conjunto $\{\neg, \vee\}$).

Negación de Disyunción

El conectivo recibe el nombre de “Nor” y se simboliza con $\downarrow$. Este conectivo posee también, para su uso en circuitos digitales, una compuerta que lo representa.

Dadas **P** y **Q** dos variables proposicionales cualesquiera, los valores de verdad que adoptará la fbf (**P** $\downarrow$ **Q**) son:

P	Q	(P ↓ Q)
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

De similar manera, dadas P y Q fbfs cualesquiera, las siguientes fbfs son equivalentes:

$$\neg P \equiv (P \downarrow P)$$
$$(P \wedge Q) \equiv ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q))$$

[9] En la bibliografía también suele simbolizarse con $\uparrow$.

También se puede demostrar su validez del modo usual, construyendo las correspondientes tablas de verdad, y se deja como ejercicio para el lector. También el conjunto $\{\downarrow\}$ constituye por sí solo un conjunto adecuado de conectivos, porque sólo usando este conectivo se pueden representar los conectivos que ya formaban de por sí un conjunto adecuado (el conjunto $\{\neg, \wedge\}$).

10. Reglas de Inferencia

Se presentan ahora las distintas posibilidades de razonamiento que involucran *condicionales* o *implicaciones*, con el fin de determinar cuáles de ellos se pueden considerar correctos. Estas formas de razonamiento suelen también recibir el nombre de *argumentaciones*, aunque algunas de ellas pueden resultar en argumentaciones válidas y otras no.

Comencemos por analizar un ejemplo de razonamiento que involucra proposiciones sencillas, para determinar cuáles de estas maneras dan lugar a reglas de inferencia y cuáles no. En un ejemplo de razonamiento sencillo que involucra un condicional aparecen dos proposiciones *el antecedente* y *el consecuente*. Por consiguiente hay cuatro posibles casos de razonamientos a considerar si se toma como verdadero el condicional y alguna de las siguientes proposiciones: la afirmación del antecedente, la negación del antecedente, la afirmación del consecuente y la negación del consecuente. Analizaremos cada una de estas posibilidades en detalle, para determinar cuáles de ellas se corresponden con *reglas de inferencia* y por consiguiente el razonamiento que se sigue es correcto y cuáles no.

Tomemos el siguiente ejemplo:

(1) Si te duermes, llegarás tarde al colegio
Se durmió
Luego, llegó tarde al colegio

Cuya traducción a lógica proposicional, considerando las siguientes equivalencias: $\underbrace{\text{“te duermes”}}_{\mathbf{P}}$ y $\underbrace{\text{“llegarás tarde al colegio”}}_{\mathbf{Q}}$, podría ser:

$$\text{(1')} \quad \begin{array}{l} \mathbf{P \rightarrow Q} \\ \mathbf{P} \\ \hline \mathbf{Q} \end{array}$$

Para analizar la correctitud de este razonamiento, consideremos la tabla de verdad del condicional:

(2)

P	**Q**	**P → Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Veamos si esta argumentación es válida. Consideremos la tabla de verdad del condicional mostrada en (2) y observemos cuando $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ y $\mathbf{P}$ son ambas verdaderas. Esto ocurrre en la primera fila de la tabla. Observemos entonces que en ese caso también es verdadero $\mathbf{Q}$. Por lo tanto, se trata de una forma argumentativa válida, que se conoce como la regla de inferencia *modus ponens*. De la afirmación del antecedente se puede deducir la afirmación del consecuente.

Analicemos el siguiente razonamiento:

(3) Si te duermes, llegarás tarde al colegio
No se durmió
Luego, (?)

Cuya traducción a lógica proposicional podría ser:

$$(3') \quad \begin{array}{l} \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \\ \neg\, \mathbf{P} \\ \hline ? \end{array}$$

Si planteamos la tabla de verdad del razonamiento, añadiendo una columna para reflejar los valores de verdad de $\neg\, \mathbf{P}$, los cuales claramente están en función de los correspondientes valores de $\mathbf{P}$, se tiene:

(4)

P	**Q**	**P → Q**	**¬ P**
V	V	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Si se observan las últimas dos filas de las últimas tres columnas puede notarse que cuando $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ y $\neg\, \mathbf{P}$ son verdaderos (tercera y cuarta línea), no se puede determinar el valor de verdad de $\mathbf{Q}$, que puede ser tanto verdadero (V) como falso (F). Se dice pues, que en estos argumentos no se concluye nada, o que de la negación del antecedente no se puede concluir la negación del consecuente.

Otra posibilidad es la siguiente:

(5) Si te duermes, llegarás tarde al colegio
Llegó tarde al colegio
Luego, (?)

Cuya traducción a lógica proposicional es:

$$(5') \quad \begin{array}{l} \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \\ \hline ? \end{array}$$

Si analizamos nuevamente la tabla de verdad del condicional se tiene que:

(6)

P	**Q**	$\mathbf{P \rightarrow Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si se observa cuando $\mathbf{P \rightarrow Q}$ y **Q** son verdaderas (primera y tercera línea de la tabla), vemos que **P** puede ser verdadero (primera línea) o falso (tercera línea). Por lo tanto, de estas premisas no se sigue nada. De la afirmación del consecuente no se puede deducir la afirmación del antecedente. Un razonamiento que hiciera eso no sería correcto.

Por último en el cuarto caso de razonamiento tendríamos:

(7) Si te duermes, llegarás tarde al colegio
No llegó tarde al colegio
Luego, no se durmió.

Cuya traducción a lógica proposicional es:

$$(7') \quad \frac{\begin{array}{c}\mathbf{P \rightarrow Q}\\ \neg \mathbf{Q}\end{array}}{\neg \mathbf{P}}$$

Si analizamos nuevamente la tabla de verdad de dicho razonamiento, para ver si este razonamiento es correcto o no, añadiéndole una columna para reflejar el valor de verdad de $\neg$ **P** se tiene que:

(8)

P	**Q**	$\mathbf{P \rightarrow Q}$	$\neg \mathbf{Q}$	$\neg \mathbf{P}$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Se observa que cuando $\mathbf{P \rightarrow Q}$ y $\neg$ **Q** son ambas verdaderas (cuarta línea de la tabla), vemos que $\neg$ **P** es también verdadero. Se trata pues de un razonamiento correcto, también conocido como *modus tollens*. De la negación del consecuente se puede deducir la negación del antecedente.

Por lo tanto, las únicas reglas de inferencia que se tienen involucrando un condicional y su antecedente y su consecuente, o la negación de ellos, se corresponden con las conocidas reglas de *Modus Ponens* y *Modus Tollens*.

Modus Ponens $\quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathbf{P \rightarrow Q}\\ \mathbf{P}\end{array}}{\mathbf{Q}}$ $\qquad$ *Modus Tollens* $\quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathbf{P \rightarrow Q}\\ \neg \mathbf{Q}\end{array}}{\neg \mathbf{P}}$

10.1. Condición Necesaria y Suficiente

Analicemos la diferencia entre condición necesaria y suficiente. Observemos la diferencia entre las siguientes frases:

(a) Si se hace un trabajo, se aprueba.

(b) Sólo si se hace un trabajo, se aprueba

En **(a)** se está expresando que hacer un trabajo es condición **suficiente** para aprobar. Si un alumno hace un trabajo y no se lo aprueba, podría acusar al responsable de no cumplir con la palabra. En **(b)** se está expresando que hacer un trabajo es condición **necesaria** para aprobar, de modo que si un alumno no hace un trabajo no podrá aprobar, pero si lo hace, no se sigue que se lo tenga que aprobar. Para formalizar estas expresiones hay que tener en cuenta que la condición suficiente se simboliza a la izquierda del conectivo "→", mientras que la condición necesaria se representa a la derecha. Así las fórmulas lógicas proposicionales equivalentes de **(a)** y **(b)**, considerando que nombramos las proposiciones de la siguiente manera: $\underbrace{\text{"hacer un trabajo"}}_{\mathbf{P}}$ y $\underbrace{\text{"aprobar"}}_{\mathbf{Q}}$, serán:

(a) $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$

(b) $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$

Veamos otros ejemplos de razonamiento hipotético en los que aparece la expresión "sólo si":

(9) Sólo si ha llegado la primavera, los árboles florecen.
La primavera ha llegado
Luego (?), comienzan los árboles a florecer?

Sea **P** la proposición "ha llegado la primavera" y **Q** "los árboles florecen". La expresión lógica de este razonamiento sería:

$$(9') \quad \begin{array}{l} \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \\ \hline ? \end{array}$$

Vemos que este argumento tiene la misma forma de (5) y ya explicamos en la sección anterior que de la afirmación del consecuente no se deduce la afirmación del antecedente. Por lo tanto, en (9') no se deduce nada.

10.2. Otras Reglas de Inferencia

Como ya mencionamos, en Lógica Proposicional existen reglas, llamadas *reglas de inferencia*, que sintácticamente permiten asegurar que ciertas fórmulas bien formadas tomarán el valor de verdad <u>Verdadero</u>, a partir de asumir con valor de verdad <u>Verdadero</u> a otras fórmulas tomadas como hipótesis. Estas reglas pueden aplicarse independientemente del significado de las proposiciones que cada una representa. Las reglas de inferencia más conocidas son:

Sean P, Q y R fórmulas bien formadas cualesquiera:

Modus Ponens (MP): de la veracidad de $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q})$ y de P, se puede asegurar la veracidad de Q.

Modus Tollens (MT): de la veracidad de $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q})$ y de $\neg$Q, se puede asegurar la veracidad de $\neg$P.

Silogismo Hipotético (SH): de la veracidad de $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q})$ y de $(\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{R})$, se puede asegurar la veracidad de $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{R})$.

Silogismo Disyuntivo (SD): de la veracidad de $(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ y de $\neg$P, se puede asegurar la veracidad de Q.

En general, para verificar si una conclusión es verdadera a partir de las hipótesis, se pueden utilizar las reglas de inferencia o verificar si es tautología la implicación de la conjunción de las suposiciones o hipótesis (fórmulas que representan las frases anteriores) con la fórmula que representa la última frase o conclusión. Es decir, si el conjunto de proposiciones que representan las frases tomadas como hipótesis es $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n\}$ y la conclusión se representa por la proposición Q, entonces se debe demostrar que la fórmula $((\bigwedge_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i) \Rightarrow \mathrm{Q})$ es una tautología (o recíprocamente también se puede mostrar que $\neg((\bigwedge_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i) \Rightarrow \mathrm{Q})$ es una contradicción).

Reconocimientos

El presente apunte se ha realizado tomando como base el apunte "Lógica: Tutorial" del Área de Servicios del Departamento de Informática, confeccionado para las materias de Introducción a la Programación para las carreras de Técnico Universitario en Microprocesadores y Técnico Universitario en Geoinformática, Introducción a la Computación para las carreras Técnico Universitario en Redes de Computadoras y Técnico Universitario en en WEB, y Fundamentos de la Informática para las carreras de Profesorado en Tecnología Electrónica e Ingeniería Electrónica con orientación en Sistemas Digitales.